1

(1) Ind. anfg: $n=1$: $\frac{1}{2} \overset{!}{\leq} \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow \quad 2 \geq \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \quad 4 \geq 3$ ✓

Ind. schritt: Angenommen: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

Zu zeigen: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \overset{!}{\leq} \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$

Nach Ind. annahme ist

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2},$$

also genügt es, zu zeigen, dass

$$\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \overset{!}{\leq} \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$$

Dies ist $\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2} \leq \frac{1}{2n+3}$ (quadrieren) ok, da alles ≥ 0

$\Leftrightarrow \quad (2n+1) \cdot (2n+3) \leq (2n+2)^2$

$\Leftrightarrow \quad 4n^2 + 8n + 3 \leq 4n^2 + 8n + 4$.

Da dies offenbar stimmt, ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 1, zweite Lösung (ohne Induktion):

Wegen $\frac{1}{2} \le \frac{2}{3}, \frac{3}{4} \le \frac{3}{4}, \dots, \frac{2n-1}{2n} \le \frac{2n}{2n+1}$

(denn $\frac{2n-1}{2n} = 1 - \frac{1}{2n} \le 1 - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}$)

$$\Big(\text{wegen } 2n < 2n+1 \Rightarrow \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n+1} \Rightarrow \checkmark \Big)$$

folgt ~~...~~

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\right)^2 \le \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n}{2n+1}$$

$$= \frac{1}{2n+1} \quad \text{(Teleskop-Produkt)},$$

also $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n} \le \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

13

2) a) Quotientenkriterium: $a_n = n^2 e^{-n}$

$$\Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2 e^{-(n+1)}}{n^2 \; e^{-n}} = e^{-1} \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2}.$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot (1+\frac{1}{n})^2}{n^2}$

$$= \lim_{n\to\infty} (1+\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{\to 0})^2 = (1+0)^2 = 1$$

ist

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = e^{-1} < 1,$$

also konvergiert die Reihe.

2) b) Verwende das Majorantenkriterium, um Konvergenz zu zeigen.

Sei $a_n = \frac{\log n}{n^3 + \sin(n)}$.

Wegen $|\sin(n)| \leq 1$ ist $n^3 + \sin(n) \geq n^3 - 1 \quad \forall n$,

also $|a_n| \leq \frac{\log n}{n^3 - 1}$.

Weiterhin $n^3 - 1 \geq \frac{n^3}{2} \quad \forall n$, da

dies $\Leftrightarrow \frac{n^3}{2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow n^3 \geq 2$, und das ist

ok für $n \geq 2$.

Also $|a_n| \leq 2 \frac{\log n}{n^3}$.

(*) Es ist $\log n \leq n \quad \forall n$, denn dies ist (mit ~~n=e~~ $x = \log n$)

$\Leftrightarrow x \leq e^x$,

und dies ~~ist~~ stimmt, da $n \geq 1 \Rightarrow x \geq 0$

$$\Rightarrow e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots \geq x.$$

Also $|a_n| \leq 2 \frac{n}{n^3} = \frac{2}{n^2}$.

Da $\sum \frac{2}{n^2}$ konvergiert, sind wir fertig.

$\rightarrow$

Alternativen ab (*), um Konvergenz von $\sum \frac{\log n}{n^3}$ zu zeigen:

- Integralkriterium: brauche $\frac{\log x}{x^3}$ monoton fallend

  (zB mittels Ableitung)

  dann $\int \frac{1}{x^3} \log x \, dx$ (Substitution $y = \log x$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$)

  $= \int e^{-2y} y \, dy$ etc.

- mittels $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$ (aus VL bekannt)

  Daraus folgt $\left(\frac{\log n}{n}\right)$ beschränkt, dh $\exists C$ mit

  $\log n \leq Cn \quad \forall n$

  $\Rightarrow |a_n| \leq 2C \frac{1}{n^2}$ etc. ($\log n = |\log n|$, da $\log x \geq 0$ für $x \geq 1$)

- mittels $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$, denn daraus folgt: $\exists n_0$ mit

  $\frac{\log n}{n} \leq 1$ für alle $n \geq n_0$, also $\log n \leq n \quad \forall n \geq n_0$,

  also $|a_n| \leq 2 \frac{n}{n^3} = \frac{2}{n^2}$.

3) Erste Lösung:

Sei $x_0 \in D$. Zu zeigen: h ist stetig in x_0.

1. Fall: $f(x_0) \neq g(x_0)$. Da die Behauptung in f und g symmetrisch ist, können wir oBdA $f(x_0) > g(x_0)$ annehmen.

Da f, g stetig sind, ist $f-g$ stetig.

Wegen $(f-g)(x_0) = f(x_0) - g(x_0) > 0$ gibt es also ein $\delta > 0$, so dass $f(x) - g(x) > 0$ $\forall x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$.

Also gilt $f(x) > g(x)$ für $|x - x_0| < \delta$

$\Rightarrow$ $h(x) = f(x)$ für $|x - x_0| < \delta$

$\Rightarrow$ h ist stetig in x_0, da f stetig in x_0 ist.

2. Fall: $f(x_0) = g(x_0)$.

Sei $\varepsilon > 0$. Da f, g stetig in x_0 sind, gibt es $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ mit

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für } |x - x_0| < \delta_1, \ x \in D$$

und $$|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für } |x - x_0| < \delta_2, \ x \in D.$$

Setze $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Für $|x - x_0| < \delta$ gilt dann

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon.$$

Behauptung: Für $x \in D$, $|x - x_0| < \delta$ ist

$$|h(x) - h(x_0)| \leq \varepsilon.$$

(also die Stetigkeit von h in x_0).

Beweis: Dies folgt aus $h(x_0) = f(x_0) = g(x_0)$ und daraus, dass im Fall

$f(x) \geq g(x)$ gilt: $h(x) = f(x)$, also $h(x) - h(x_0) = f(x) - f(x_0)$

und im Fall

$g(x) \geq f(x)$ gilt: $h(x) = g(x)$, also $h(x) - h(x_0) = g(x) - g(x_0)$.

Typische Fehler:

- Die Behauptung "falls $f(x) \geq g(x)$ auf einem Intervall, so ist $h(x) = f(x)$ auf dem Intervall" ist zwar richtig, muss aber bewiesen werden.
- Die Behauptung "falls $f = h$ auf einem Intervall $I \subset D$ und f stetig auf D ist, so ist h stetig in allen $x \in I$"
  ist falsch! (im Allgemeinen)

Sie ist richtig für offene Intervalle I (Beweis ähnlich wie oben).

Gegenbsp. für nicht offenes I: $D = \mathbb{R}$, $f(x) = 0 \ \forall x$,

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \geq 0 \\ 1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Dann $f = h$ auf $[0, \infty)$, aber h unstetig in 0.

• (etwas unwichtiger) D braucht kein Intervall zu sein, kann beliebige Teilmenge von $\mathbb{R}$ sein (zB auch $D = \mathbb{Z}$ möglich). Daher kann der Zwischenwertsatz nicht direkt angewendet werden.

• Beim Nachweis der Stetigkeit von h in "Schnittpunkten" x_0 (d.h. $f(x_0) = g(x_0)$) kann man nicht annehmen, dass einer der Fälle

$$f(x) < g(x) \text{ für } x < x_0 \;,\; f(x) > g(x) \text{ für } x > x_0$$

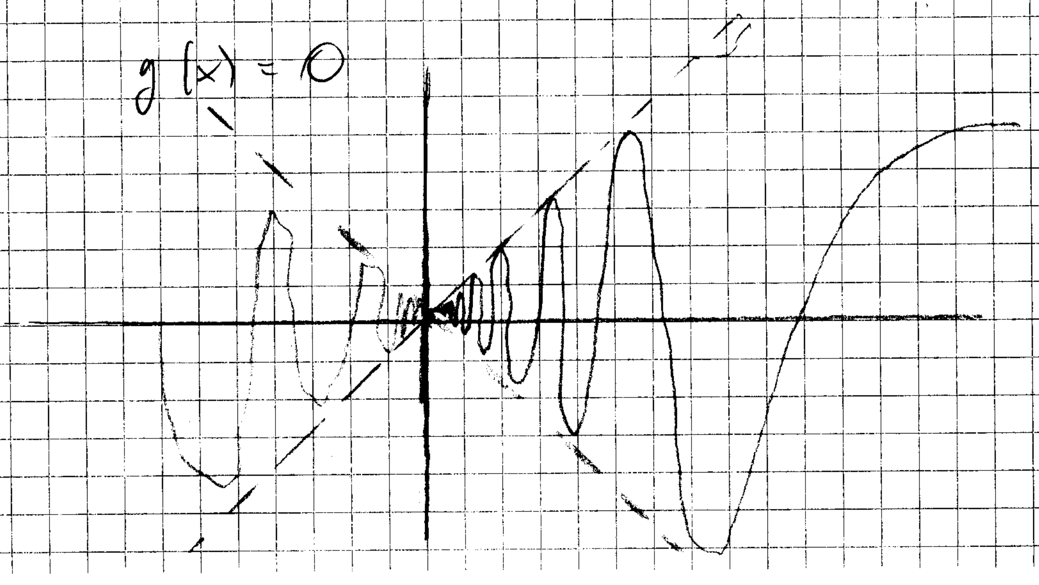
oder umgekehrt

eintritt (nicht einmal, wenn man statt $x < x_0$ nur die x mit $x_0 - \delta < x < x_0$ betrachtet, für ein $\delta > 0$, und analog bei $x > x_0$).

Das relative Verhalten von f und g kann viel komplizierter sein.

<u>Beispiel</u>: $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

$g(x) = 0$



Weitere häufige Fehler bei Aufgabe 3

- Wenn man zB "$f(x) = g(x)$" schreibt, muss man angeben, ob dies für ein x oder für <u>alle</u> x gelten soll. ($\exists x$ oder $\forall x$)
  Dies wurde manchmal vergessen, daraus resultierten unvollständige Fallunterscheidungen.

- (Wichtig, häufiger Fehler!)
  Stetigkeit ist keine Eigenschaft "in einem Punkt", sondern "~~in der~~ bei Annäherung an einen Punkt".

  Also: Falls f stetig in x_0 ist und $h(x_0) = f(x_0)$, so folgt <u>nicht</u>, dass h stetig in x_0 ist.

Aufgabe 3, zweite Lösung

(ein hübscher Trick, auf den man aber selbst kaum kommen kann ...)

Lemma: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\max\{a,b\} = \frac{1}{2}\left(a+b+|a-b|\right)$$

Beweis: Falls $a \geq b$, so $\max\{a,b\} = a$ und $|a-b| = a-b$,

also $a = \frac{1}{2}(a+b+a-b)$ ✓

Falls $a < b$, so $\max\{a,b\} = b$ und $|a-b| = -(a-b) = b-a$,

also $b = \frac{1}{2}(a+b-a+b)$ ✓

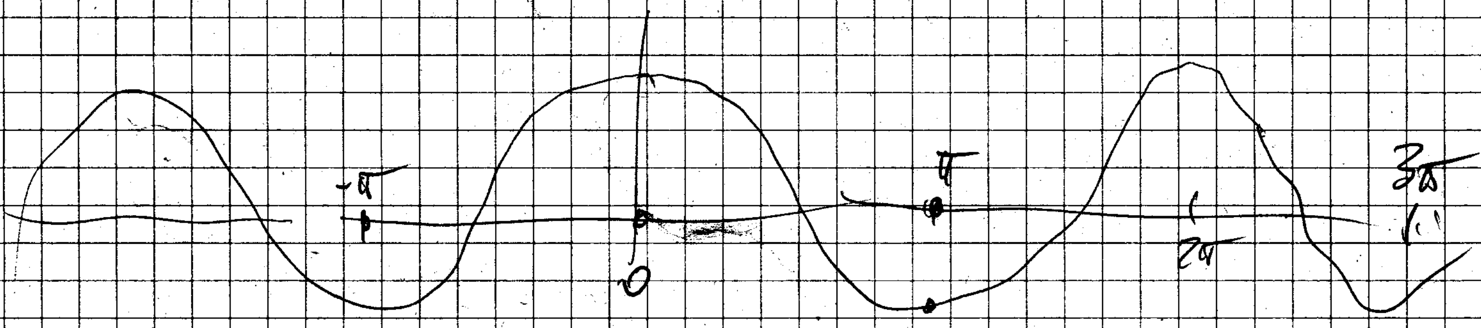
Also gilt $h = \frac{1}{2}\left(f+g+|f-g|\right)$.

Mit f, g sind auch $f+g$ und $f-g$ stetig.
Da die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \longmapsto |t|$ stetig ist, ist dann auch $|f-g|$ stetig (Komposition stetiger Funktionen).
Also ist auch $h = \frac{1}{2}\left(f+g+|f-g|\right)$ stetig.

4

$$f'(x) = 1 + \cos x$$

Also $f'(x) = 0 \iff \cos x = -1$.



$$\cos x = -1 \iff x \in \{\pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots\} =: M$$

$$f''(x) = -\sin x$$
$$f'''(x) = -\cos x$$

Für $x \in M$ ist $-\sin x = 0$, $-\cos x = 1 \neq 0$, also

$$f'(x) = f''(x) = 0, \quad f'''(x) \neq 0, \text{ also}$$

$\boxed{\text{Alle } x \in M \text{ sind Sattelpunkte}}$

$\boxed{\text{Es gibt keine lokalen Extrema}}$

$\sin x \geq 0$ auf $[0,\pi], [2\pi, 3\pi], \dots \; [2k\pi, (2k+1)\pi], k \in \mathbb{Z}$

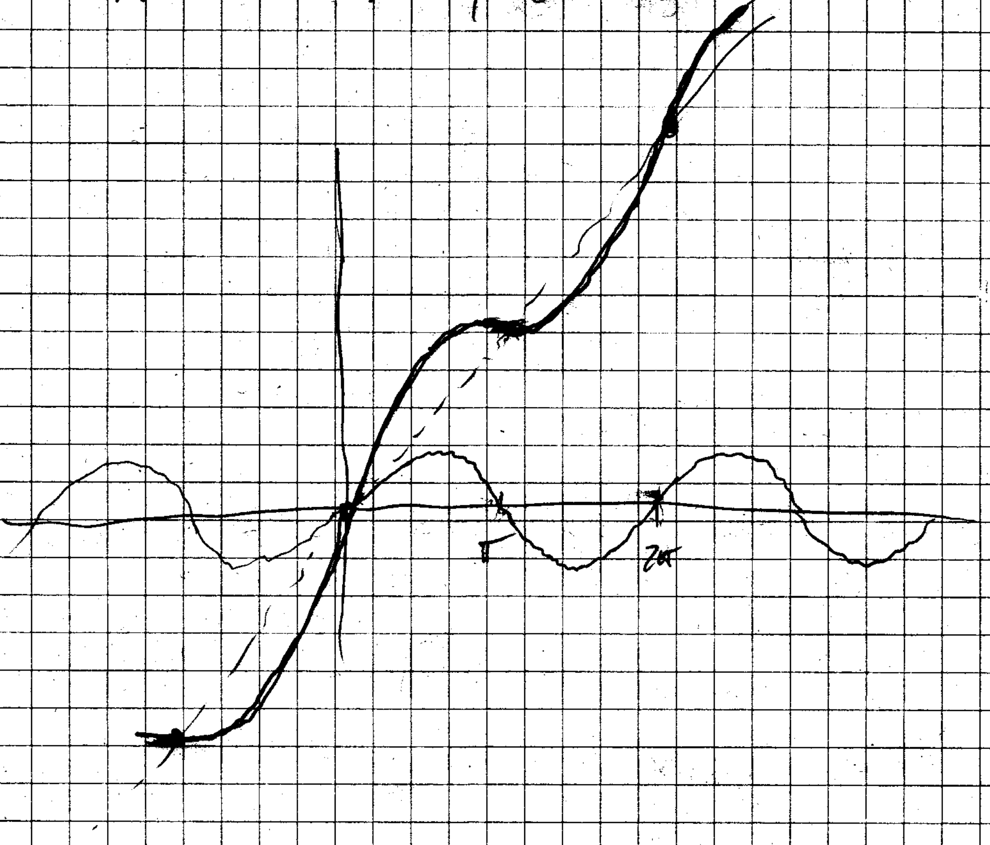
dort ist $f'' \leq 0$, also $\boxed{f \text{ konkav}}$

analog: auf $[(2k-1)\pi, 2k\pi], k \in \mathbb{Z}$ ist $\boxed{f \text{ konvex}}$

$\boxed{f \text{ monoton wachsend}}$

$f'(x) = 1 + \cos x \geq 0$, da $\cos x \geq -1 \;\; \forall x$.

Skizze:



5a Partielle Integration: $\int u'v = uv - \int uv'$

$$u'(x) = x^2, \quad v(x) = \log x$$

$$\Rightarrow u(x) = \frac{x^3}{3}, \quad v'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \int x^2 \log x \, dx = \frac{x^3}{3} \log x - \int \frac{x^2}{3} dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \log x - \frac{x^3}{9}$$

$$\Rightarrow \int_1^2 x^2 \log x \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \log x - \frac{x^3}{9} \right]_1^2$$

$$= \left[\frac{8}{3} \log 2 - \frac{8}{9} \right] - \left[0 - \frac{1}{9} \right]$$

$$= \frac{8}{3} \log 2 - \frac{7}{9}$$

5) b) Substitution $y = x^4+1$.

Dann $\frac{dy}{dx} = 4x^3 \Rightarrow dx = \frac{dy}{4x^3}$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{x^4+1}\,dx = \frac{x^3}{y}\,\frac{dy}{4x^3} = \frac{1}{4}\,\frac{dy}{y}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^3}{x^4+1}\,dx = \int \frac{1}{4}\,\frac{dy}{y} = \frac{1}{4}\log|y|$$

$$= \frac{1}{4}\log|x^4+1|$$

$$= \frac{1}{4}\log(x^4+1) \qquad (\text{da } x^4+1>0\ \forall x)$$

6) a) Für $x=0$ ist $f_n(x)=0$ $\forall n$, also $f_n(0)\to 0$ $(n\to\infty)$.

Für $x\neq 0$ ist $f_n(x) = \frac{nx}{1+|nx|} = \frac{x}{\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}+|x|} \to \frac{x}{|x|}$ für $n\to\infty$.

$$= \begin{cases} 1 & (x>0) \\ -1 & (x<0) \end{cases}$$

Also folgt

$$f_n(x) \xrightarrow{(n\to\infty)} f(x) := \begin{cases} 0 & x=0 \\ 1 & x>0 \\ -1 & x<0, \end{cases}$$

d.h. die punktweise Konvergenz.

b) da $x\mapsto nx$ und $y\mapsto |y|$ stetig sind für alle n, ist auch $x\mapsto |nx|$ stetig.

Da $1+|nx|>0$ ist, ist dann auch $\frac{nx}{1+|nx|}$ stetig $\forall n$.

Also ist f_n stetig für alle n.

f ist unstetig, da es bei $x=0$ eine Sprungstelle hat.

Wäre die Konvergenz $f_n\to f$ gleichmäßig, so würde aus der Stetigkeit aller f_n die Stetigkeit von f folgen.

Also ist die Konvergenz nicht gleichmäßig.

c) Es ist $|nx| \leq 1 + |nx| \quad \forall n \forall x$,

also $$|f_n(x)| = \frac{|nx|}{1+|nx|} \leq 1 \quad \forall n \forall x.$$

also $$|g_n(x)| = \left|\frac{1}{n} f_n(x)\right| \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \forall x.$$

Also folgt $$\sup_{x \in \mathbb{R}} |g_n(x) - g(x)| \leq \frac{1}{n} \quad \forall n,$$

und wegen $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ folgt, dass

$g_n \to g$ gleichmäßig.