Lösungen Wiederholungsklausur

Analysis I, 10.4.2006

① Induktionsanfang ($n=1$):

$$\sum_{k=0}^{0} k^5 = 0^5 = 0 < \frac{1^6}{6} = \frac{1}{6} \quad \checkmark$$

Induktionsvoraussetzung:

Es gelte $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k^5 \leq \frac{n^6}{6}$.

Induktionsschritt:

$$(*) \quad \sum_{k=0}^{n} k^5 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} k^5\right) + n^5 \overset{I.V.}{\leq} \frac{n^6}{6} + n^5.$$

Wegen der binomischen Formel ist

$$(n+1)^6 = n^6 + \binom{6}{1} n^5 + \binom{6}{2} n^4 + \ldots + \binom{6}{6}$$

$$> n^6 + \binom{6}{1} n^5 = n^6 + 6n^5,$$

also $$\frac{n^6}{6} + n^5 < \frac{(n+1)^6}{6}$$

Mit $(*)$ folgt also

$$\sum_{k=0}^{n} k^5 < \frac{(n+1)^6}{6},$$

was zu zeigen war.

(2) a) Wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (Vorlesung)

ist $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} = \frac{1}{1^2} = 1$$

(Stetigkeit von $f(x) = \frac{1}{x^2}$ bei $x = 1$, oder mittels Grenzwertregeln),

also ist der Konvergenzradius

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Daher konvergiert die Reihe für $|x| < 1$ und divergiert für $|x| > 1$.

Für $x = 1$ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (nach Vorlesung),

daher konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

(da diese Reihe absolut konvergiert).

Antwort: $\boxed{x \in [-1, 1]}$

2) b) $\sqrt[n]{3^n + 4^n} = \sqrt[n]{4^n\left(\frac{3^n}{4^n} + 1\right)}$

$= 4 \cdot \sqrt[n]{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n}$

Wegen $1 \leq 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n < 2$ folgt

$4 \cdot \sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{3^n + 4^n} < 4 \cdot \sqrt[n]{2}$

Wegen $\sqrt[n]{1} = 1$ und $\sqrt[n]{2} \longrightarrow 1 \quad (n \to \infty)$

folgt $\sqrt[n]{3^n + 4^n} \longrightarrow 4 \quad (n \to \infty)$

(Sandwichlemma)

Also ist der Konvergenzradius

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n}} = \frac{1}{4}$$

Für $x = \frac{1}{4}$ ist $(3^n + 4^n)x^n = \underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^n}_{\downarrow\, 0} + 1 \to 1$.

Da die Glieder der Reihe nicht gegen Null konvergieren, divergiert die Reihe für $x = \frac{1}{4}$.

Für $x = -\frac{1}{4}$ ist $\left|(3^n + 4^n)x^n\right| = \left|\underbrace{\left(-\frac{3}{4}\right)^n}_{\downarrow\, 0} + (-1)^n\right| \to 1$,

also ebenfalls Divergenz.

Antwort: $\boxed{x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)}$

(3) $f(x) = x^{5/2} - 2x^{3/2}$

$f'(x) = \frac{5}{2} x^{3/2} - 2 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2} x^{3/2} - 3 x^{\frac{1}{2}}$

$f''(x) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} x^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{5}{2} x - 1 \right)$

Lokale Extrema:

• für $x > 0$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2} x^{3/2} = 3 x^{\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow x = \frac{6}{5}$

$f''\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\left(\frac{5}{2} \cdot \frac{6}{5} - 1\right)}_{= \frac{6}{2} - 1 = 3 - 1 = 2 > 0} > 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\frac{6}{5} \text{ ist lokales Minimum}}$

• $x = 0$: Es ist $f(0) = 0$ und $f(x) < 0$ für $0 < x < 2$ (wegen $x - 2 < 0$, $x^{3/2} > 0$ für d'ese x),

also ist $\boxed{x = 0 \text{ lokales Maximum}}$

Konvex/konkav: $f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2} x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{5}$.

Also: $\boxed{\begin{array}{l} f \text{ konkav für } x \in [0, \frac{2}{5}] \\ f \text{ konvex für } x \in [\frac{2}{5}, \infty) \end{array}}$

$f'(0)$ existiert, da

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} (x-2)\cdot x^{\frac{1}{2}} = 0$$

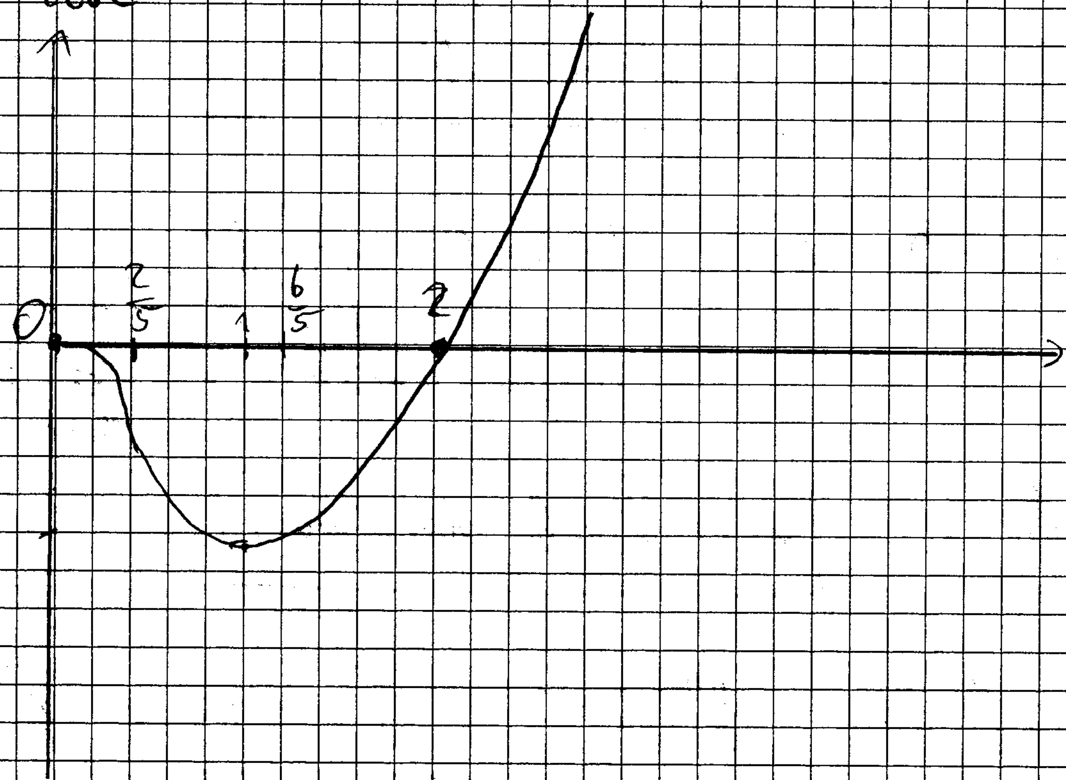
also $f'(0) = 0$

$f''(0)$ existiert nicht, da

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}}}{x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{5}{2}x^{\frac{1}{2}}}_{\to 0} - 3\underbrace{x^{-\frac{1}{2}}}_{\to \infty}$$

$$= -\infty$$

Skizze



4) a) Substitution $y = \log x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$, $dx = x\,dy$

<u>1. Lösung</u>: Berechne zunächst das unbestimmte $\int$:

$$\frac{\sqrt{\log x}}{x}\,dx = \frac{\sqrt{y}}{x}\,x\,dy = \sqrt{y}\,dy$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sqrt{\log x}}{x}\,dx = \int \sqrt{y}\,dy = \frac{y^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3}(\log x)^{3/2}$$

$$\Rightarrow \int_1^e \frac{\sqrt{\log x}}{x}\,dx = \frac{2}{3}(\log x)^{3/2}\Big|_1^e$$

$$= \frac{2}{3}\Big(\underbrace{(\log e)}_{=1}^{3/2} - \underbrace{(\log 1)}_{=0}^{3/2}\Big) = \frac{2}{3}$$

<u>2. Lösung:</u>

$$\int_1^e \frac{\sqrt{\log x}}{x}\,dx = \int_{\log 1}^{\log e} \sqrt{y}\,dy = \frac{2}{3}y^{3/2}\Big|_{\log 1 = 0}^{\log e = 1}$$

$$= \frac{2}{3}\left(1^{3/2} - 0^{3/2}\right) = \frac{2}{3}$$

4) b) $\int x^2 \sin x \, dx$

$u = x^2, \quad v' = \sin x$

$u' = 2x, \quad v = -\cos x$

$= -x^2 \cos x - \int 2x(-\cos x)\,dx$

$u_1 = 2x, \quad v_1' = \cos x$

$u_1' = 2, \quad v_1 = \sin x$

$= -x^2 \cos x + 2x \sin x - \int 2 \sin x \, dx$

$= \boxed{-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x}$

(5) $f(x) = \sin x + \cos 2x \Rightarrow f(0) = 0+1 = 1$

a) $f'(x) = \cos x - 2\sin 2x \Rightarrow f'(0) = 1-0 = 1$

$f''(x) = -\sin x - 4\cos 2x \rightarrow f''(0) = -4$

$$T_2(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = \boxed{1 + x - 2x^2}$$

Alternativ: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$, $\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \dots$

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{1 + x - \frac{(2x)^2}{2!}}_{T_2(x)} - \frac{x^3}{3!} \dots$$

b) $f'''(x) = -\cos x + 8\sin 2x$

Satz von Taylor: $f(x) - T_2(x) = f'''(\xi) \cdot \frac{x^3}{3!}$

für ein ξ zwischen 0 und x.

Für $|x| \leq 1$ ist $|x^3| = |x|^3 \leq 1^3 = 1$

und $|\xi| \leq 1$

$$|f'''(\xi)| = |-\cos\xi + 8\sin 2\xi|$$
$$\leq |\cos\xi| + 8|\sin 2\xi| \leq 1 + 8\cdot 1 = 9$$

Also $|f(x) - T_2(x)| \leq 9 \cdot \frac{1}{3!} = \frac{9}{6} = \boxed{\frac{3}{2}}$

(6) a) Falsch, z. B. $a_n = n$, $b_n = -n$

$a_n \to \infty$, $b_n \to -\infty$ divergent, $a_n + b_n = 0 \to 0$ konvergent.

b) Wahr, denn $a_n = \frac{a_n + b_n}{2} + \frac{a_n - b_n}{2}$

$$b_n = \frac{a_n + b_n}{2} - \frac{a_n - b_n}{2}.$$

Nach den Grenzwertregeln konvergieren mit $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$ auch $\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$ und $\left(\frac{a_n - b_n}{2}\right)$ und damit deren Summe (a_n) und Differenz (b_n).

c) Falsch. Gegenbeispiel: $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

(a_n) erfüllt die Bedingung, denn

$$|a_{n+p} - a_n| = \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p}\right| \leq \left(\frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} + \dots + \frac{1}{n+p}\right)$$

$$= \frac{p}{n+p}$$

Zu $p \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ wähle $n_0 \geq \frac{p}{\varepsilon}$, dann ist für $n \geq n_0$

$$|a_{n+p} - a_n| \leq \frac{p}{n+p} < \frac{p}{n} \leq \frac{p}{\left(\frac{p}{\varepsilon}\right)} = \varepsilon.$$

Aber (a_n) ist keine Cauchyfolge, denn sonst würde (a_n) konvergieren.
Aber $a_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ (Partialsummen der harmonischen Reihe)