1) Charakteristisches Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2$$

Doppelte Nullstelle $\lambda = 2$

$\Rightarrow$

$$y_{hom} = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t}$$

Inhomogene Lösung: $\cos 2t = \operatorname{Re} e^{2it}$

$$p(2i) = -4 - 8i + 4 = -8i \neq 0$$

$\Rightarrow$ spezielle Lösung $y_{inhsp} = \operatorname{Re} \frac{1}{-8i} e^{2it}$

$$= \operatorname{Re} \left(\frac{i}{8} (\cos 2t + i \sin 2t) \right)$$

$$= \operatorname{Re} \left(\frac{i}{8} \cos 2t - \frac{1}{8} \sin 2t \right)$$

$$= -\frac{1}{8} \sin 2t$$

$\Rightarrow$ $y_{allg} = -\frac{1}{8} \sin 2t + C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t}$

2) Seperation der Variablen:

$$(1+t^2)\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2y+2} \Leftrightarrow (2y+2)\,dy = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\int (2y+2)\,dy = \int \frac{dt}{1+t^2}$$

$$y^2+2y = \arctan t + C$$

$$y^2+2y - (\arctan t + C) = 0 \qquad y(0)=0 \Rightarrow C=0$$

$$y = -1 \pm \sqrt{1+\arctan t \cancel{+C}}$$

$y(0)=0 \Rightarrow$ nur "+"- Lösung zählt

$$\Rightarrow y(t) = -1 + \sqrt{1+\arctan t}$$

definiert für $1+\arctan t \geq 0$, d.h. $\arctan t \geq -1$,

d.h. $t \geq \tan(-1)$

Aber bei $t=\tan(-1)$ ist $\arctan t = -1$, also $y=-1$

$\Rightarrow$ Gleichung nicht definiert.

Also: Max. Intervall $(\tan(-1), \infty)$

3) $\vec{y} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\quad \vec{y}' = A\vec{y}$, $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Char. Pol. $\quad p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 4$, Nullstellen $\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = 4$

$\lambda_1 = 1$: $\quad A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, Eigenvektor $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 4$: $\quad A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, Eigenvektor $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Allgemeine Lösung

$$\vec{y}(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Anfangswert: $\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} C_1 + C_2 &= 3 \\ -C_1 + 2C_2 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow C_1 = 2, \; C_2 = 1$$

$$\Rightarrow \vec{y}(t) = 2e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

oder $\quad x(t) = 2e^t + e^{4t}$

$\quad\quad\; y(t) = -2e^t + 2e^{4t}$

4) a) Die Funktion $f(t) = \|\gamma(t)\|^2$ hat bei $t = t_0$ ein Minimum. Also $f'(t_0) = 0$.

$\|\gamma(t)\|^2 = \langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle \Rightarrow f'(t) = \langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle + \langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle$

$= 2 \langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle.$

Also $\langle \gamma'(t_0), \gamma(t_0) \rangle = 0$

$\Rightarrow$ $\gamma'(t_0)$ orthogonal zu $\gamma(t_0)$.

b) Nein, z.B. $\gamma(t) = (e^t, 0, \dots, 0)$, dann

$\{\|\gamma(t)\| : t \in \mathbb{R}\} = \{\|(e^t, 0, \dots, 0)\| : t \in \mathbb{R}\}$

$= (0, \infty)$, das hat kein Minimum.

5) a) $0 + 2\cdot 0^2 + 3\cdot 0^3 = 0$ ✓

$e^0 + e^{2\cdot 0} + e^{3\cdot 0} = 1+1+1 = 3$ ✓

Sei $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + 2y^2 + 3z^3 \\ e^x + e^{2y} + e^{3z} \end{pmatrix}$.

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 4y & 9z^2 \\ e^x & 2e^{2y} & 3e^{3z} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow J_{f;x,y}(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ mit Determinante $2 \neq 0$

also invertierbar

$\Rightarrow f(x,y,z) = 0$ ist lokal nach x,y auflösbar.

b) $f(x(z), y(z), z) = 0 \quad \forall z$

$\Rightarrow J_{f;x,y} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + J_{f;z} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -J_{f;x,y}^{-1} J_{f;z}$.

bei $x=y=z=0$: $J_{f;x,y}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$J_{f;z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$, also $x'(0) = 0$

$y'(0) = -\frac{3}{2}$.

6.) Sei $K = \{ x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1 \}$.

K ist kompakt, da abgeschlossen (definiert durch $\leq$) und beschränkt (nach Def.)

Also nimmt f auf K sein Maximum und sein Minimum an.

Sei $f(M) = \max_{x \in K} f(x)$, $f(m) = \min_{x \in K} f(x)$.

<u>1. Fall</u>: M oder m liegt in $\mathring{K} = \{ x : \|x\| < 1 \}$.

Da $\mathring{K}$ offen ist, folgt $\nabla f(M) = 0$ bzw. $\nabla f(m) = 0$, was zu zeigen war ($p = M$ bzw. $p = m$).

<u>2. Fall</u>. M und m liegen auf $\partial K = \{ x : \|x\| = 1 \}$.

Nach Voraussetzung folgt $f(M) = f(m) = 0$.

Nach Definition von M, m folgt $f(x) = 0 \quad \forall x \in K$.

Da f konstant auf K ist, folgt $\nabla f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathring{K}$, man kann also $p \in \mathring{K}$ (oder sogar K wegen Stetigkeit von ∇f) beliebig wählen.

Typisches Fehler bei 6):

Seien x_1, x_2 Punkte mit $\|x_1\| = 1$, $\|x_2\| = 1$ und $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ eine differenzierbare Kurve von x_1 nach x_2, also $\gamma(0) = x_1$, $\gamma(1) = x_2$ und $\|\gamma(t)\| < 1 \quad \forall t \in (0,1)$.

Dann muss die Ableitung von f irgendwo auf der Kurve verschwinden.

Das ist so nicht richtig!

Richtig ist: Weil $f(\gamma(0)) = f(\gamma(1)) = 0$ ist, muss die Ableitung der Funktion $f \circ \gamma$ für ein $t_0 \in (0,1)$ verschwinden. (nach Mittelwertsatz aus Ana I).

Das bedeutet
$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} f \circ \gamma = Df|_{\gamma(t_0)}(\gamma'(t_0))$$
$$= \langle \nabla f(\gamma(t_0)), \gamma'(t_0) \rangle,$$

d.h. nur die <u>Richtungsableitung</u> von f <u>in Richtung $\gamma'(t_0)$</u> verschwindet bei $p = \gamma(t_0)$, nicht notwendig jedoch $\nabla f(p)$ oder $Df|_p$ selber. Dieses Argument reicht also zur Lösung der Aufgabe nicht aus.