[Lufbrachter-Klausur Ana II, 6.7.06]

1.) a) $\frac{dy}{dt} y = -\sin t \Rightarrow \int y\, dy = -\int \sin t\, dt$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} = \cos t + C$$

$$\Rightarrow y = \pm \sqrt{2(\cos t + C)}$$

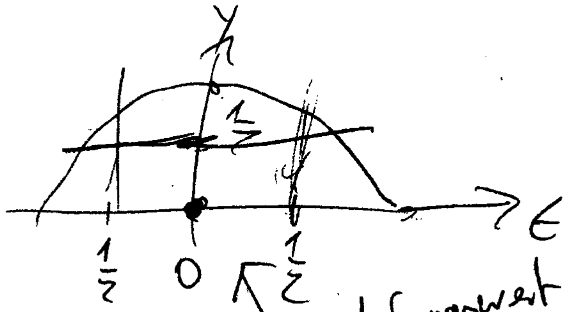
AB: $y(0) = 1$: $\frac{1^2}{2} = \cos 0 + C = 1 + C \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$

Außerdem $y(0) > 0 \Rightarrow$ + -Zeichen bei $\sqrt{\ }$.

Also $y(t) = \sqrt{2\cos t - 1}$.

Definitionsbereich: es muss $2\cos t - 1 \geq 0$ sein, also

$$\cos t \geq \frac{1}{2}$$



Wegen $\cos \pm\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ ist der max. Def.bereich

$$\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$$

($\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ wäre auch ok, obwohl leicht unpräzise)

1) b) Die Gleichung ist linear:

$$y' - \frac{1}{t} y = t.$$

Homogene Gl.: $y_h' - \frac{1}{t} y_h = 0$

$$\Rightarrow \quad y_h = C \cdot e^{\int \frac{1}{t} dt} = C \cdot e^{\log t}$$
$$= C \cdot t$$

Inhomogene Gleichung: $y_{in} = c(t) \cdot t$

$$\Rightarrow y_{in}' - \frac{1}{t} y_{in} = c' \cdot t \overset{!}{=} t$$

$$\Rightarrow c' = 1 \Rightarrow c(t) = t + C_1$$

Eine Lösung ist $y_{in} = t \cdot t = t^2$.

Allgemeine Lösung: $y_{allg}(t) = t^2 + C t$.

$$y(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + C = 0 \Rightarrow C = -1$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = t^2 - t}$$

Definiert auf $\mathbb{R}$.
(Def.bereich $(0,\infty)$ auch ok, da Gleichung nur dort definiert)

2) a)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 0\cdot\lambda - 9 \quad \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3.$$

$$\lambda_1 = 3: \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} v_1 = 0 \quad \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ z.B.}$$

$$\lambda_1 = -3: \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ z.B}$$

$\Rightarrow$ Allgemeine Lsg. $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$
hat doppelte Nullstelle.

$\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0$: nur ein E.V. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$!

<u>Besser:</u> Löse zunächst $y(t) = C_1 e^t$, dann setze ein:

$x' = x + C_1 e^t$: $\quad x' - x = C_1 e^t$

$p(\lambda) = \lambda - 1$ hat $p(1) = 0$

$\Rightarrow$ spezielle Lösung $\quad \dfrac{C_1}{p'(1)} t e^t = C_1 t e^t$

$\Rightarrow$ Allgemeine Lsg. $\quad x(t) = C_1 t e^t + C_2 e^t$
$\quad y(t) = C_1 e^t$

3) a)

Homogene Gleichung:

Charakterist. Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda - 1 = 0$

$$\lambda = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + 1}.$$

$$\lambda_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + 1}$$

$$\lambda_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + 1}$$

$$\Rightarrow y_{hom}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Spezielle Inhomogene Lsg.: $e^t = e^{1 \cdot t}$,

$$p(1) = 1 + a - 1 = a.$$

2 Fälle:

- $a \neq 0$: $p(1) \neq 0 \Rightarrow y_{inh,sp}(t) = \frac{1}{p(1)} e^t = \frac{1}{a} e^t$

$$\Rightarrow y_{allg}(t) = \frac{1}{a} e^t + C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

- $a = 0$: $p(1) = 0$, aber $p'(1) = 2 \cdot 1 + a = a + 2$
$= 2 \neq 0$

$$\Rightarrow y_{inh,sp}(t) = \frac{1}{p'(1)} t e^t = \frac{1}{2} t e^t \quad (a = 0)$$

$$\Rightarrow y_{all}(t) = \frac{1}{2} t e^t + C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}. \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -$$

3) b) $a>0 \Rightarrow$ allg. Lsg. ist

$$y(t) = \frac{1}{a}e^t + C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\Rightarrow \frac{y(t)}{\frac{1}{a}e^t} = 1 + \underbrace{aC_1 e^{(\lambda_1 - 1)t}}_{\substack{\xrightarrow{(t\to\infty)} 0 \\ \text{falls } \lambda_1 - 1 < 0}} + \underbrace{C_2 e^{(\lambda_2 - 1)t}}_{\substack{\to 0 \\ \text{falls } \lambda_2 - 1 < 0.}}$$

Zu zeigen: $\lambda_1 < 1$, $\lambda_2 < 1$.

- $\lambda_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4}+1} = \frac{\sqrt{\frac{a^2}{4}+1}^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}{+\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4}+1}} = \frac{1}{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4}+1}} < 1,$

  da Nenner > 1.

- $\lambda_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4}+1} < 0 < 1$ ok.

4) a) $y' = z \Rightarrow z' = y'' = -ay' - by = -az - by$, also

$$y' = 0\cdot y + 1\cdot z$$

$$z' = -b\cdot y - a\cdot z$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix},$$ b) $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$

= charakt. Gleichung von $y'' + ay' + by = c$

c) $\left((y')^2 + 4y^2\right)' = 2y'y'' + 4\cdot 2yy'$

$= 2y'(y'' + 4y) = 0$, falls y Lösung

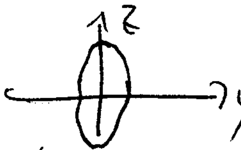
$\Rightarrow (y')^2 + 4y^2$ = konstant.

Also ist für die Lösung $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$:

$$z^2 + 4y^2 = \text{konstant} = C$$

Geht der Orbit durch $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, so folgt $C = 1^2 + 4\cdot 1^2$
$= 5$.

Schnitt mit y-Achse: $z = 0 \Rightarrow 4y^2 = 5 \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{5}{4}}$



Ellipsen.

Schnitt mit z-Achse: $y = 0 \Rightarrow z^2 = 5 \Rightarrow z = \pm\sqrt{5}$