Klausur: Analysis III

(als 6 KP-Fach, Zwei-Fächer-Bachelor)

WS 2006/2007 Grieser
19.1.2007

1. Aufgabe

Berechnen Sie:

a) Das Volumen des Körpers

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z \leq 2,\ x^2+y^2 \leq 1\}\,.$$

b) Das Integral

$$\int_D \frac{x+y}{x^2}\,dx\,dy,\ D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < y \leq x,\ 1 \leq x+y \leq 2\right\}$$

mittels der Variablentransformation

$$u = x+y, v = \frac{y}{x}$$

2. Aufgabe

Sei $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^4 + z^4 = 1\}$.

a) Zeigen Sie, dass M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Gehen Sie eine lokale Karte für M in einer Umgebung des Punktes $p = (1,0,0)$ an.

c) Für welche $q = (x,y,z) \in M$ steht der Tangentialraum T_qM vertikal, d.h. enthält den Vektor $v = (0,0,1)$?

3. Aufgabe

Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion.
Für $r \in \mathbb{R}$ sei $\ell(r)$ die Kurvenlänge des Graphen der Funktion

$$x \mapsto r \cdot f(x),\ x \in [a,b].$$

Geben Sie eine Formel für $\ell(r)$ an. Zeigen Sie, dass ℓ zweimal differenzierbar ist und dass gilt:

$$\begin{aligned}
\ell(0) &= b - a \\
\ell'(0) &= 0 \\
\ell''(0) &= \int\limits_a^b |f'(x)|^2 dx.
\end{aligned}$$

4. Aufgabe

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?
Begründen Sie Ihre Antwort (Beweis oder Gegenbeispiel).

a) Die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \notin \mathbb{Q}\}$ ist eine Nullmenge.

b) Ist $A \subset \mathbb{R}^2$ eine Nullmenge, so ist auch

$$\{x : (x, 0) \in A\} \subset \mathbb{R} \text{ eine Nullmenge.}$$

c) Eine offene Menge in $\mathbb{R}^n$ ist niemals eine Nullmenge.

d) Ist $A \subset \mathbb{R}$ eine Nullmenge, so ist auch der Abschluss $\overline{A}$ eine Nullmenge.