Prof. Dr. Daniel Grieser 7.2.2007

Analysis III: Themen

Hier ist eine stichwortartige Liste von Themen der Analysis III, die Sie kennen sollten. (Reihenfolge innerhalb der Abschnitte thematisch)

Definitionen

Eine Definition zu kennen, heißt: 1. Eine Vorstellung von dem Begriff zu haben, 2. Eine exakte Definition hinschreiben zu können, 3. Ein paar typische Beispiele angeben zu können

- charakteristische Funktion, Treppenfunktion, Rechnen mit ∞
- Lebesgue-Integrierbarkeit, $\mathcal{L}^1(A), L^1(A)$ für $A \subset \mathbb{R}^n$
- Nullmenge, Nullfunktion, 'fast überall'
- Immersion, lokale Karte, Untermannigfaltigkeit, Untermgfk mit Rand
- Gram-Determinante
- Tangentialraum, Tangentialvektor
- Integral über eine Untermannigfaltigkeit
- Kurvenintegral eines Vektorfeldes
- Träger einer Funktion
- Wegzusammenhang
- (Äußeres) Normalenvektorfeld
- harmonische Funktion
- Faltung
- Begriff der Fourierreihe

Sätze

Einen Satz zu kennen heißt: 1. ihn ungefähr ('anschaulich') formulieren zu können; 2. ihn genau formulieren zu können; 3. zu verstehen, warum ggf. Annahmen gemacht werden (Gegenbeispiele bei Weglassen von Annahmen); im Idealfall 4. seine Bedeutung einordnen zu können (wofür? Typische Beispiele?); und für die, die in der Mathematik weiterkommen wollen 5. einen Beweis angeben zu können (zumindest eine Beweisidee)

Siehe auch Abschnitte 'Rechnen' und 'Verständnis'

Ein * bedeutet: Besonders zentral

- Satz von Heine-Borel
- Eigenschaften von $\mathcal{L}^1$ und $\int$ (linear, beschränkt, stetig, ändert sich nicht bei Änderung auf einer Nullmenge, Translations- und Rotationsinvarianz)

- Eigenschaften von Nullmengen, Charakterisierung von Nullmengen mittels Überdeckung durch Quader
- Zusammenhänge Nullmengen $\leftrightarrow$ Nullfunktionen, integrierbare Funktionen
* Konvergenzsätze; Integration durch Ausschöpfung
- Vertauschen von Differentiation und Integration
* Satz von Fubini
* Transformationsformel
* Äquivalenz der drei Charakterisierungen von Untermannigfaltigkeiten
- Hinreichende und notwendige Bedingungen, wann ein Vektorfeld ein Gradientenfeld ist
* Integralsatz von Gauß
- Partielle Integration in höheren Dimensionen, Greensche Formeln
- Harmonische Funktionen: Mittelwerteigenschaft, Maximumsprinzip, Darstellungsformel für Lösungen von $\Delta u = f$
- Eigenschaften der Faltung
- Approximation der Identität

Rechnen

Hier kann man nur sagen: Übung macht die Meisterin! (bzw. den Meister) Wichtig: Genau hinsehen, nach Mustern suchen, Spezialfälle betrachten, verschiedenes probieren,...

- Beispiele von Nullmengen
- Transformationsformel: Anwendung vor- und rückwärts
- Polarkoordinaten, Integration über Kugelschalen
- Flächen/Volumenberechnung mittels Fubini (bzw. Cavalieri) und Trf.-Formel
- Volumen von Parallelotopen
- Bestimmen einer lokalen Karte (oder Darstellung als Graph) einer Untermannigfaltigkeit, die als Lösungsmenge einer Gleichung gegeben ist
- Für jede der drei Darstellungsformen einer Untermgfk. (als Graph oder mittels lokaler Karten oder als Lösungsmenge von Gleichungen):
  - Berechnen des Tangentialraums
  - Längen/Flächenberechnung, Integration über eine Untermgfk
  - Bestimmung eines Einheitsnormalenvektorfeldes (im Fall von Hyperflächen)
- Berechnen von Kurvenintegralen, Bestimmen einer Stammfunktion eines Vektorfeldes (wenn sie existiert)
- Berechnung der Fourierkoeffizienten einer 2π-periodischen Funktion

Verständnis von Zusammenhängen

Nicht alles lässt sich in Sätzen, Definitionen und Rechenverfahren zwängen. Genauso wichtig ist das Verständnis von Zusammenhängen und eine Vorstellung, worum es geht. Was die leidige Klausur angeht: Dies lässt sich schwer testen, es hilft aber enorm, auch um effizient zu rechnen

- Grundidee der Definition des Integrals
- Warum werden bei den Konvergenzsätzen für das Integral Voraussetzungen benötigt?
- Warum tritt die Determinante in der Transformationsformel auf? Beweisidee.
- Intuitives Verständnis, wann eine Menge eine Untermannigfaltigkeit ist (und welcher Dimension)
- Bedeutung der Divergenz eines Vektorfeldes
- Intuitive Bedeutung des Satzes von Gauß

Wichtig, aber sicher nicht auf der Klausur

- Messbare Mengen und Funktionen und deren Eigenschaften
- Mannigfaltigkeiten mit Rand
- Konvergenz von Fourierreihen (Fejér; L^2-Konvergenz)
- Fouriertransformation