Prof. Dr. Daniel Grieser
Dr. Gohar Harutyunyan

12.Januar 2007

10. Übungsblatt zur Analysis III

1) I) c), II) b)

(je 3 Punkte)

2) Für eine zweimal differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, schreibt man

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

(sprich: 'Laplace f').

Zeigen Sie:

a) $\Delta f = \operatorname{div} \nabla f$

b) $\Delta \frac{1}{\|x\|^{n-2}} = 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

c) $\Delta \log \|x\| = 0$ für $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

(je 2 Punkte)

3) Zeigen Sie:

a) $\operatorname{div}(f \cdot V) = \langle \nabla f, V\rangle + f \operatorname{div} V, \quad f, V$ differenzierbare Funktion bzw. Vektorfeld im $\mathbb{R}^n$

b) $\Delta(fg) = (\Delta f)g + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle + f\Delta g, \quad f, g$ zweimal differenzierbare Funktionen im $\mathbb{R}^n$

(je 3 Punkte)

4) Gebiete mit glattem Rand sind oft mittels einer Ungleichung definiert:

Satz: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion. Sei $N = f^{-1}(0)$. Angenommen, es gilt $\nabla f(x) \neq 0$ für alle $x \in N$. Dann ist

$$M = \{x : \ f(x) \geq 0\}$$

ein Gebiet mit glattem Rand $\partial M = N$ und äußerem Einheitsnormalenvektor

$$\nu(x) = -\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}, \quad x \in \partial M$$

f heißt *definierende Funktion* für M.

a) Beweisen Sie den Satz!
Hinweis: Falls $p \in N$ und $\partial f/\partial x_n(p) \neq 0$ ist, wenden Sie den Satz über die Umkehrabbildung auf die Abbildung $x \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, f(x))$ an.

b) Zeigen Sie, dass die Ellipse $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ $(a, b > 0)$ ein Gebiet mit glattem Rand ist, und berechnen Sie das äußere Einheitsnormalenvektorfeld.

(4+2 Punkte)

5) (Extra) Sei $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, ein differenzierbarer Weg von Matrizen. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\frac{d}{dt}\det A(t) = \det A(t) \cdot \operatorname{tr}(A(t)^{-1}A'(t)),$$

falls $A(t)$ invertierbar ist. Hierbei ist $\operatorname{tr} B$ die Spur der Matrix B, also die Summe der Diagonalelemente von B.

Äquivalent: Das Differential der Abbildung $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ bei einer invertierbaren Matrix A ist gegeben durch

$$D\det{}_{|A}(H) = \det A \cdot \operatorname{tr}(A^{-1}H)$$

(3 Extrapunkte)

Abgabe: Bis 19. Januar 2007 vor Vorlesungsbeginn im Postfach Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin.

Aufgaben zum Üben der neuen Konzepte

I) Berechnen Sie $\operatorname{div} F$ für die Vektorfelder

a) $F(x,y) = (x^2y, x+y)$

b) $F(x,y) = (y,x)$

c) $F(x) = x \cdot \|x\|^a$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ a \in \mathbb{R}$.

II) Berechnen Sie $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ für folgende Funktionen:

a) $f(x,y) = x^2 - y^2$

b) $f(x,y) = \sin(ax)\sin(by),\ a,b \in \mathbb{R}$