Prof. Dr. Daniel Grieser
Dr. Gohar Harutyunyan 19.Januar 2007

11. Übungsblatt zur Analysis III

In allen Aufgaben sei $M \subset \mathbb{R}^n$ ein kompaktes Gebiet mit glattem Rand und ν ein äußeres Normalenfeld für ∂M.

1) Berechnen Sie:

   a) $\int\limits_{\partial M} \langle c, \nu(x) \rangle \, dS(x)$ für einen Vektor $c \in \mathbb{R}^n$.

   b) $\int\limits_{\partial D} \langle (x, y), \nu(x, y) \rangle dS(x, y)$, $D = [0, 1] \times [0, 1]$.

(je 3 Punkte)

2) Sei $u : M \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion. Die erste Green'sche Formel ergibt, wenn man für beide Funktionen u nimmt, die Identität

$$\int_M u\Delta u = \int_{\partial M} u \frac{\partial u}{\partial n} dS - \int_M |\nabla u|^2$$

   Zeigen Sie:

   a) Ist u eine Eigenfunktion von Δ mit Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, also

$$\Delta u = \lambda u,$$

   und gilt $u = 0$ oder $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ auf ∂M, so folgt $\lambda \leq 0$.

   b) In (a) sind die einzigen Eigenfunktionen mit Eigenwert $\lambda = 0$ die konstanten Funktionen, falls M wegzusammenhängend ist.

   c) Eine harmonische Funktion auf M ist durch ihre Werte auf ∂M eindeutig bestimmt.

(je 2 Punkte)

3) Sei $n = 2$. Angenommen, ∂M ist wegzusammenhängend, also das Bild einer geschlossenen Kurve γ. Wir nehmen an, dass γ den Rand von M gegen den Uhrzeigersinn durchläuft, dass also M immer links von γ liegt. Sei $F = (F_1, F_2)$ ein C^1-Vektorfeld auf M. Zeigen Sie mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes

$$\int_\gamma F = \int_M \operatorname{rot} F, \quad \text{wobei } \operatorname{rot} F := \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

(6 Punkte)

   Bemerkung: Das ist ein Spezialfall des 'Integralsatzes von Stokes'. Vergleichen Sie dies mit den Sätzen zu der Frage, wann F ein Gradientenfeld ist.

4) Sei B^n die Einheitskugel und S^{n-1} die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$. Geben Sie mindestens zwei Beweise für die Identität

$$\operatorname{vol}_n(B^n) = \frac{1}{n} \operatorname{vol}_{n-1}(S^{n-1}).$$

(6 Punkte)

Abgabe: Bis 26. Januar 2007 vor Vorlesungsbeginn im Postfach Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin.