Prof. Dr. Daniel Grieser
Dr. Gohar Harutyunyan

25. Januar 2007

12. Übungsblatt zur Analysis III

1) I)b),c)

(je 3 Punkte)

2) a) Zeigen Sie: Sei $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{C}$ gerade, d.h. $f(x) = f(-x)$. Dann ist $\hat{f}(k) = \hat{f}(-k), \forall k$, und in der Sinus-Cosinus-Darstellung der Fourierreihe kommen nur die Cosinus-Terme vor (sogenannte Cosinusreihe).

b) Zeigen Sie: Sei $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{C}$ ungerade, d.h. $f(x) = -f(-x)$. Dann ist $\hat{f}(k) = -\hat{f}(-k), \forall k$, und in der Sinus-Cosinus-Darstellung der Fourierreihe kommen nur die Sinus-Terme vor (sog. Sinusreihe).

c) Welche Eigenschaft von f entspricht der Bedingung "$\hat{f}(k) = 0$ für alle ungeraden k"?

(je 2 Punkte)

3) a) Sei $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \geq 0$, $\int \varphi = 1$. Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

für $\varepsilon \to 0$ eine Approximation der Identität bilden.

b) Zeigen Sie: Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$(f * g)^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subset f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) + g^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}),$$

und falls $\operatorname{supp} f$ oder $\operatorname{supp} g$ kompakt ist, dann gilt auch

$$\operatorname{supp}(f * g) \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g.$$

Hierbei bedeutet $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$.

(je 3 Punkte)

4) Zeigen Sie: Jede harmonische Funktion ist unendlich oft differenzierbar. (Formal: $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^2(U)$, $\Delta u = 0$ auf $U \Rightarrow u \in C^\infty(U)$.)

Anleitung: Zeigen Sie mit Hilfe der Mittelwerteigenschaft, dass $u(x) = (\varphi * u)(x)$ für jede integrierbare rotationssymmetrische Funktion φ (d.h. $\varphi(z)$ hängt nur von $\|z\|$ ab) gilt, deren Träger in $K_\varepsilon(0)$ für genügend kleines $\varepsilon > 0$ liegt und für die $\int \varphi = 1$ gilt. Zeigen Sie, dass ein solches φ existiert, das außerdem unendlich oft differenzierbar ist, und verwenden Sie Eigenschaften der Faltung.

(6 Punkte)

Abgabe: Bis 2. Februar vor Vorlesungsbeginn im Postfach Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin.

Aufgaben zum Üben der neuen Konzepte

I) Bestimmen Sie die Fourierreihen in der e^{ikx}- und in der Sinus-Cosinus-Darstellung. Die Funktinonen sind jeweils auf $(-\pi, \pi)$ definiert und 2π-periodisch fortgesetzt:

a) $f(x) = |x|$,
b) $f(x) = x^2$,
c) $f(x) = e^{ax}$,
d) $f(x) = \operatorname{sign}(\cos x)$.

II) Sei $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion von $[0, 1]$. Berechnen Sie $\chi * \chi$ und $(\chi * \chi) * \chi$. Was beobachten Sie bzgl. der Stetigkeit bzw. Differenzierbarkeit?