Prof. Dr. Daniel Grieser
Dr. Gohar Harutyunyan

1. Februar 2007

13. Übungsblatt zur Analysis III (freiwillig)

1) Finden Sie die beste Approximation im quadratischen Mittel

- von $f(x) = x^2$ auf $(-\pi, \pi)$ durch eine Konstante
- von $f(x) = x$ auf $(-\pi, \pi)$ durch eine Konstante
- von $f(x) = x$ auf $(0, 2\pi)$ durch eine Konstante
- von $f(x) = |\sin x|$ auf $(-\pi, \pi)$ durch eine Funktion der Form $A + B\cos x + C\sin x$

2) Zeigen Sie: Ist $\alpha \in \mathbb{N}$ und f eine Funktion auf S^1, die α mal stetig differenzierbar ist, so gibt es eine Konstante C, so dass für alle k gilt:

$$|\hat{f}(k)| \leq \frac{C}{|k|^\alpha}$$

Bemerkung: Mit anderen Worten: Je glatter f, desto schneller konvergieren die Fourierkoeffizienten von f für $k \to \infty$ gegen Null. Dies ist von fundamentaler Bedeutung für die Fourier-Analysis.

Hinweis: Integrieren Sie partiell in der Definition von $\hat{f}(k)$

3) Zeigen Sie: Für $f, g \in \mathcal{L}^1(S^1)$ gilt

$$\widehat{(f * g)}(k) = \hat{f}(k) \cdot \hat{g}(k) \quad \forall k$$

(Die Faltung für Funktionen auf S^1ist durch $(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)\,dy$ definiert.)

4) Zeigen Sie: Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ eine messbare Menge mit endlichem Maß, so gilt für Funktionen f_k $(k \in \mathbb{N})$, f in $L^2(A)$:

$$f_k \to f \text{ gleichmäßig } \Rightarrow f_k \to f \text{ bezüglich der } L^2-\text{Norm.}$$

5) *(Eine nicht-triviale Eigenschaft der Faltung und eine überraschende Aussage über Mengen)*

a) Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und g beschränkt. Zeigen Sie, dass $f * g$ stetig ist.

b) Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ messbare Mengen mit positivem Lebesgue-Maß. Zeigen Sie, dass $A + B := \{x + y : x \in A,\ y \in B\}$ nicht-leeres Inneres hat, d.h. es gibt eine offene Kugel, die in $A + B$ enthalten ist.

c) Zeigen Sie, dass $f * g$ nicht stetig zu sein braucht, wenn f und g unbeschränkt sind.

Hinweise: (a) Zeigen Sie dies zuerst für $f =$ charakteristische Funktion eines Quaders, dann für Treppenfunktionen, dann durch Approximation eines beliebigen f durch Treppen allgemein.

(b) Wenden Sie (a) auf $f = \chi_A,\ g = \chi_B$ an.

(c) Untersuchen Sie $f = g = \chi_{[0,1]}(x)x^{-2/3}$ auf $\mathbb{R}$.

Bemerkung: (b) ist überraschend, da eine Menge mit positivem Maß leeres Inneres haben kann, z.B. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.