Prof. Dr. Daniel Grieser
Dr. Gohar Harutyunyan 02.November 2006

# 2. Übungsblatt zur Analysis III

1) Bestimmen Sie die $L^1$-Halbnorm der Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\chi_{[0,2]}, \qquad \chi_{\mathbb{Q}}, \qquad \chi_{\mathbb{R}}.$$

(Begründung!)

(je 2 Punkte)

2) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = (-1)^{nm} \cdot \frac{1}{2^{\max(n,m)}} \quad \text{falls} \quad n \le |x| < n+1, \quad m \le |y| < m+1.$$

Zeigen Sie, dass $f$ Lebesgue-integrierbar ist.

(6 Punkte)

3) Es sei $K$ eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes $X$ und $\{U_i\}_{i\in I}$ sei eine Überdeckung von $K$ durch offene Mengen in $X$.
Zeigen Sie: Es gibt ein $r > 0$ derart, dass jede Kugel $K_r(x), x \in K$, in einer der Mengen $U_i$ liegt.

(6 Punkte)

4) Sei $V$ ein Vektorraum und $||\cdot|| : V \to [0,\infty)$ eine endliche Halbnorm auf $V$.
Ein lineares Funktional auf $V$ ist eine lineare Abbildung

$$l : V \to \mathbb{R}.$$

$l$ heißt **beschränkt** (bzgl. $\|\ \|$), falls ein $C < \infty$ existiert, so daß für alle $v \in V$ gilt

$$|l(v)| \le C||v||, \tag{1}$$

und **stetig** (bzgl. $\|\ \|$), falls

$$v_k \to v \quad (\text{d.h} \quad ||v_k - v|| \to 0) \Rightarrow l(v_k) \to l(v).$$

(Alle Grenzwerte für $k \to \infty$.)

a) Zeigen Sie, dass ein Funktional genau dann stetig ist, wenn es beschränkt ist.
b) Sei $W \subset V$ ein Unterraum und $\overline{W}$ sein Abschluss bezüglich $||\cdot||$, d.h.

$$\overline{W} = \{w \in V : \ \exists (w_k)_k \subset W \text{ mit } w_k \to w\}.$$

Sei $l$ ein beschränktes lineares Funktional auf $W$.
Zeigen Sie, daß es genau ein beschränktes lineares Funktional $\bar{l}$ auf $\overline{W}$ gibt, das $l$ fortsetzt (d.h. $\bar{l}|_W = l$), und daß für $\bar{l}$ die Bedingung (1) gilt für alle $v \in \overline{W}$ mit **derselben** Konstante $C$ wie für $l$.

(In der Vorlesung wird dies angewendet auf $V = \{$die Funktionen $\mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ mit endlicher $L^1$-Halbnorm$\}$, $\|\ \| =$ die $L^1$-Halbnorm, $W = \{$Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^n\}$ und $l(w) = \int w\,dx$. Dann ist $\overline{W}$ die Menge der Lebesgue-integrierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ und $\bar{l}(w) = \int w\,dx$, das Lebesgue-Integral von $w$.)

(je 3 Punkte)

**Abgabe:** Bis 10. November (Freitag!) vor Vorlesungsbeginn im Postfach Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin.