Prof. Dr. Daniel Grieser
Dr. Gohar Harutyunyan

09.November 2006

3. Übungsblatt zur Analysis III

1) Zeigen Sie:

   a) jede Gerade $G \subset \mathbb{R}^2$ ist eine Nullmenge,

   b) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist eine stetige Nullfunktion $\Rightarrow f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(je 3 Punkte)

2) Die **Cantor-Menge** wird folgendermaßen konstruiert:
   Aus dem Intervall $[0, 1]$ entferne man das mittlere Drittel $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Es bleibt die Menge

$$A_1 := \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

   Aus den beiden Teilintervallen von A_1 entferne man jeweils wieder das mittlere Drittel. Es bleibt die Menge

$$A_2 := \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

   So fortfahrend, erhält man im k-ten Schritte eine Menge A_k, die Vereinigung von 2^k disjunkten Intervallen ist. Durch Wegnahme der mittleren Drittel dieser Teilintervalle entsteht A_{k+1}. Die Cantor-Menge ist definiert als

$$C := \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

   Beweisen Sie, daß die Cantor-Menge
   a) abgeschlossen, b) überabzählbar, c)Nullmenge
   ist.

(je 2 Punkte)

3) Sei $\alpha > 0$. Zeigen Sie, daß

$$f(x) = e^{-x} \cdot x^{\alpha-1}$$

   über $[0, \infty)$ integrierbar ist.

(6 Punkte)

4) Zeigen Sie:

$$\lim_{r\to\infty} \int_0^1 r e^{(x^2-1)r^2} dx = 0.$$

(6 Punkte)

Abgabe: Bis 17. November vor Vorlesungsbeginn im Postfach Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin.

Aufgaben zum Üben der neuen Konzepte

1) Bestimmen Sie, ob folgende Mengen Nullmengen sind:

   a) $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$,

   b) $\mathbb{R} \times \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^2$,

   c) $\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ eine stetige Funktion}\} \subset \mathbb{R}^2$.

2) Sei $Q \in \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar.
   Zeigen Sie, daß dann auch $f \cdot \chi_Q$ über $\mathbb{R}^n$ integrierbar ist.

3) Zeigen Sie:
   x^α ist über $[0, 1]$ integrierbar genau dann, wenn $\alpha > -1$.

4) Zeigen sie:
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \sin^n x dx = 0.$$