Prof. Dr. Daniel Grieser
Dr. Gohar Harutyunyan 16.November 2006

4. Übungsblatt zur Analysis III

1) Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n), f \geq 0$.

   a) Zeigen Sie, daß auf der Menge M der messbaren Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ durch

   $$\mu_f(A) := \int_A f(x)dx, \quad A \in M,$$

   ein Mass definiert wird.

   b) Zeigen Sie, daß Lebesgue-Nullmengen auch μ_f-Nullmengen sind, d.h.

   $$N \quad \text{ist Nullmenge } \Rightarrow \mu_f(N) = 0.$$

   Bemerkung: Man kann zeigen, daß jedes Mass auf M mit der Eigenschaft b) von der Form μ_f für ein geeignetes f ist. f heißt "Dichte" von μ_f. Physikalisch ist $\mu_f(A)$ die Gesamtmasse des Körpers A, dessen Dichte (d.h. Massenverteilung) durch die Funktion f beschrieben wird.
   Man spricht auch von einen gewichteten Volumen (Orte, wo f groß ist, werden mit größerem "Gewicht" gezählt als Orte, wo f klein ist).

(je 3 Punkte)

2) Für $A \in M$ sei (Bezeichnungen wie in Aufgabe 1)

   $$\delta(A) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad 0 \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

   Zeigen Sie, daß δ ein Maß auf M definiert, und dass kein $f \in \mathcal{L}^1$ existiert mit $\delta = \mu_f$.

(6 Punkte)

3) Berechnen Sie:

   a) $\int_{[0,1]\times[0,1]} \sin(x+y)dxdy$,

   b) $\int_K xydxdy, \qquad K = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(je 3 Punkte)

4) **Rotationskörper** Sei $r : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $r \geq 0$ und $A := \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq r^2(z), z \in [a,b]\}$ der Rotationskörper mit der Meridiankurve r. Man zeige:

   a) A hat das Volumen

   $$\text{vol}\,(A) = \pi \int_a^b r^2(z)dz.$$

   b) Ist (ξ, ζ) der Schwerpunkt der Menge $F \subset \mathbb{R}^2, F := \{(x,z) : 0 \leq x \leq r(z), z \in [a,b]\}$, so gilt

   $$\text{vol}\,(A) = 2\pi\xi \cdot v_2(F) \quad (\textit{Guldinsche Regel}).$$

   Definition: Als Schwerpunkt einer meßbaren Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit positivem Volumen V definiert man im Existenzfall den Punkt $S = (s_1, \ldots, s_n)$ mit

   $$s_\nu := \frac{1}{V} \cdot \int_K x_\nu dx, \quad \nu = 1, \ldots, n.$$

c) Man berechne das Volumen des Volltorus, der durch Rotation der Kreisscheibe $\{(x, z) : (x-R)^2+z^2 \leq r^2\}, 0 < r < R$, um die z-Achse entsteht, und verifiziere daran die Guldinsche Regel.

(je 2 Punkte)

Abgabe: Bis 24. November, 10:15, im Postfach Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin.

Aufgaben zum Üben der neuen Konzepte

1) a) f ist integrierbar über $A, B \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow f$ ist integrierbar über $A \cup B$.

   b) Sei $g : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \overline{\mathbb{R}}, x \in \mathbb{R}^p, y \in \mathbb{R}^q$. Setze

$$|g|_x : \mathbb{R}^q \to \overline{\mathbb{R}}, \quad |g|_x(y) := ||g(\cdot, y||_{1,\mathbb{R}^p},$$

   und für $G : \mathbb{R}^q \to \overline{\mathbb{R}}$ setze $|G|_y := ||G||_{1,\mathbb{R}^q}$. Zeigen Sie:

$$||g||_1 \geq ||g|_x|_y,$$

   wo $||\cdot||_1 :=$ L^1-Norm auf $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$.

2) Man berechne den Schwerpunkt der folgenden Menge:

$$A := \{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, y \geq 0\}.$$

3) Berechnen Sie:

   a) $\int_K (x^2 + yx)dxdy, K = \{(x, y) : y^2 \leq x \leq y\}$,

   b) $\int_K (x^2 + 2y^2 - xy)dxdy, K = \{(x, y) : |x| + |y| \leq a\}$,

   c) $\int_K xy^2z^3dxdydz, K = \{(x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.