Prof. Dr. Daniel Grieser
Dr. Gohar Harutyunyan

23. November 2006

5. Übungsblatt zur Analysis III

1) II) b); III) b) (auf der Rückseite).

(je 3 Punkte)

2) IV) b); V) b) (auf der Rückseite).

(je 3 Punkte)

3) VI b) (auf der Rückseite).

(6 Punkte)

4) Sei

$$K = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad f : K \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

a) Für $-1 \leq a \leq b \leq 1$ sei $S_{a,b} := \{(x, y) \in K : a \leq x \leq b\}$.
Zeigen Sie

$$\int_{S_{a,b}} f(x, y) dx dy = \pi \cdot (b - a).$$

b) Wir werden später zeigen, daß für messbares $A \subset K$

$$\begin{aligned} 2 \int_A f(x, y) dx dy &= \text{der } 2- \text{ dimensionale Flächeninhalt der Menge} \\ & \quad Z_A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad (x, y) \in A\}. \end{aligned}$$

Ist A ein von zwei parallelen Geraden begrenzter Streifen, nennt man Z_A auch *Kugelzone*. Zeigen Sie, daß der Flächeninhalt einer Kugelzone proportional zu ihrer Breite (d.h. der Breite des sie definierenden Streifens, soweit er in K verläuft) ist.

(je 3 Punkte)

Extra: Zeigen Sie, daß eine Kreisscheibe vom Radius 1 nicht mit Papierstreifen der Gesamtbreite < 2 überdeckt werden kann.

D.h.: Angenommen, Sie haben rechteckige Papierstreifen $S_1, \ldots, S_N$. S_i habe die Breite b_i und die Länge 10. Angenommen, $b_1 + \ldots + b_N < 2$. Legt man dann $S_1, \ldots, S_N$ in *beliebiger* Weise (natürlich ohne knicken) auf die Kreisscheibe, bleibt ein Teil der Kreisscheibe unbedeckt.

(3 Extra Punkte)

Abgabe: Bis 01. Dezember vor Vorlesungsbeginn im Postfach Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin.

Aufgaben zum Üben der neuen Konzepte

I) Schreiben Sie mit umgekehrter Reihenfolge der Integrationen:

a) $\int_1^2 \left(\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy \right) dx;$

b) $\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sin x} f(x,y)dy \right) dx;$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} f(r,\varphi)dr \right) d\varphi, \quad a > 0.$

II) Berechnen Sie mittels Polarkoordinaten:

a) $\int\int_D |xy|dxdy, \quad D = \{(x,y) : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4a^2\};$

b) $\int\int_D (ax+by)dxdy, \quad D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq R^2, x - y \leq 0\};$

c) $\int\int_D \frac{y^2}{x^2+y^2} dxdy, \quad D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq ax, a > 0\}$

III) Machen Sie Variablenwechsel $(x,y) \to (u,v)$ und berechnen Sie:

a)
$$\int\int_D (x^2 + xy)dxdy; \quad u = \frac{y}{x}, v = \frac{y}{2-x};$$
D ist die Fläche, die durch die Geraden $x = 2y, y = 2x, x + 2y = 2, 2x + y = 4$ beschränkt ist.

b)
$$\int\int_D \sqrt{xy}dxdy; \quad x = u\cos^4 v, y = u\sin^4 v;$$
D ist die Fläche, die durch die Linien $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}(a > 0), x = 0, y = 0$ beschränkt ist.

c)
$$\int\int_D x^2 \cdot ydxdy; \quad x = au\cos v, y = bu\sin v;$$
$D = \{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}.$

IV) Berechnen Sie die Inhalte der Flächen, die durch folgende Linien beschränkt sind:

a) $y^2 = 2px + p^2, \quad y^2 = -2qx + q^2 \quad (p > 0, q > 0);$

b) $2x^2 + 2y^2 = 2x + 1, \quad x^2 + y^2 \geq 1;$

c) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, \quad x + y = a.$

V) Berechnen Sie die Volumina der Körper, die durch folgende Flächen beschränkt sind:

a) $z = xy, \quad x + y + z = 1, \quad z = 0;$

b) $x^2 + y^2 = \alpha z^2, \quad x^2 + y^2 = \alpha x, \quad z > 0;$

c) $x^2 + y^2 = cz, \quad x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2), \quad z = 0.$

VI) Wählen Sie geeignete Variablenwechsel und berechnen Sie die Inhalte der Flächen, die durch folgende Linien beschränkt sind:

a) $x + y = a, \quad x + y = b, \quad y = \alpha x, \quad y = \beta x \quad (0 < a < b, 0 < \alpha < \beta);$

b) $xy = a^2, \quad xy = 2a^2, \quad y = x, \quad y = 2x \quad (x > 0, y > 0);$

c) $y^2 = 2px, \quad y^2 = 2qx, \quad x^2 = 2ry, \quad x^2 = 2sy \quad (0 < p < q, 0 < r < s).$