Prof. Dr. Daniel Grieser
Dr. Gohar Harutyunyan

30. November 2006

6. Übungsblatt zur Analysis III

1) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ meßbar und symmetrisch um den Nullpunkt, d.h. für alle $x \in A$ ist $-x \in A$. Sei $f : A \to \mathbb{R}$ integrierbar mit $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in A$.
   Zeigen Sie, dass $\int_A f(x)dx = 0$. (6 Punkte)

2) a) Lesen Sie den Satz auf der Rückseite unten und überzeugen Sie sich, entweder allein oder anhand Ihres Lieblings-Analysisbuches (z.B. Königsberger II Kapitel 8.4), dass der Beweis mittels des Satzes über die majorisierte Konvergenz ganz einfach ist.
   b) Sei
   $$F(t) = \int\int_{D_t} \sqrt{x^2+y^2}dxdy; \qquad D_t := \{(x,y) : (x-t)^2 + (y-t)^2 \leq 1\}, t \in \mathbb{R}.$$
   Zeigen Sie mittels eines geeignetes Variablenwechsels, dass $F'(t) = \int\int_{D_t} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$.

   (6 Punkte)

3) Sei
   $$\Delta = \{(x_1, \dots, x_n) : 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq 1\} \quad \text{('Standardsimplex')}$$
   Zeigen Sie, dass
   $$\mathrm{vol}\,(\Delta) = \frac{1}{n!}.$$
   (6 Punkte)

4) Zeigen Sie, dass das Integral
   $$\int_{x^2+y^2\leq 1} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$
   existiert.
   Als Information: In $\mathbb{R}^n$ existiert das Integral $\int_{||x||\leq 1} \frac{1}{||x||^\alpha}$ genau dann, wenn $a < n$.

   (6 Punkte)

Extra: Eine Ellipse ist das Bild eines Kreises unter einer invertierbaren linearen Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : E = T(K), \quad K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

a) Drücken Sie die Fläche von (E) mittels T aus.
b) Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a > 0, ac - b^2 > 0$, und $q(\xi, \eta) = a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2$. Zeigen Sie, dass
   $$E = \{(\xi, \eta) : q(\xi, \eta) < 1\}$$
   eine Ellipse mit Fläche $\frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}$ ist.

Hinweis: Wir haben
$$q(\xi, \eta) = (\xi \quad \eta)A \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$
Sie dürfen folgende Resultate der linearen Algebra verwenden:
· $a > 0, ac - b^2 > 0 \Rightarrow A$ ist positiv definit,
· A ist positiv definit $\Rightarrow$ es existiert eine 2×2-Matrix S mit $S^tS = A$.
Bemerkung: Eine Funktion der Form q heißt *quadratische Form* und $ac-b^2$ ihre *Diskriminante*. Die Aufgabe zeigt eine geometrische Bedeutung der Diskriminante.

(3 Extra Punkte)

Abgabe: Bis 08. Dezember vor Vorlesungsbeginn im Postfach Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin.

Aufgaben zum Üben der neuen Konzepte

I) Zeigen Sie, dass wenn mindestens eine von $m, n \in \mathbb{N}$ ungerade ist, dann

$$\int\int_D x^m y^n dxdy = 0; \qquad D := \{x^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

II) Sei

$$F(t) = \int\int_{D_t} e^{-\frac{tx}{y^2}} dxdy; \qquad D_t := \{(x, y) : 0 \leq x \leq t, 0 \leq y \leq t\}, t > 0.$$

Mittels geeignetes Variablenwechsels zeigen Sie, dass

$$F'(t) = \frac{2F(t)}{t}.$$

III) Berechnen Sie

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dxdydz.$$

IV) Mittels Zylinderkoordinaten oder Kugelkoordinaten berechnen Sie das Volumen der Körper, die durch folgende Flächen beschränkt sind:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 2\alpha z, \quad x^2 + y^2 \leq z^2,$

b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$

c) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 3\alpha xyz (\alpha > 0),$

d) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = b^2, \quad x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0 (0 < a < b).$

Zylinderkoordinaten: $x = r\cos\psi, y = r\sin\psi, z = z$ und $\det DT = r$.

Kugelkoordinaten: $x = ar\cos\varphi\cos\psi, y = br\sin\varphi\cos\psi, z = cr\sin\psi$, wo a, b, c Konstante sind, und $r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$.
Ferner, $\det DT = abcr^2\cos\psi$.

Für die Aufgaben 2) verwenden Sie folgenden Satz:

Satz über das Vertauschen von Ableitung und Integral: (vgl. auch Analysis II, Kapitel 6.6) Seien $X \subset \mathbb{R}^p, T \subset \mathbb{R}^q$ offen und $f : X \times T \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

i) Für jedes feste $t \in T$ ist $x \mapsto f(x, t)$ über X integrierbar;

ii) Für jedes feste $x \in X$ ist $t \mapsto f(x, t)$ stetig differenzierbar;

iii) Es gibt eine auf X integrierbare Funktion Ψ mit

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t_\nu}(x, t)\right| \leq \Psi(x) \quad \text{für alle } (x, t) \in X \times T \quad \text{und} \quad \nu = 1, \ldots, q.$$

Dann ist die durch

$$F(t) := \int_X f(x, t) dx$$

definierte Funktion F stetig differenzierbar. Ferner ist für jedes $t \in T$ die Funktion $x \to \partial_{t_\nu} f(x, t)$ integrierbar, und es gilt

$$\frac{\partial F}{\partial t_\nu} = \int_X \frac{\partial f}{\partial t_\nu}(x, t) dx.$$