Prof. Dr. Daniel Grieser
Dr. Gohar Harutyunyan

07. Dezember 2006

7. Übungsblatt zur Analysis III

1) I) a), c).

(je 3 Punkte)

2) II) a), c).

(je 3 Punkte)

3) Zeigen Sie, daß $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2\}$ eine Fläche in $\mathbb{R}^3$ ist.

Zeigen Sie, daß

$$g_1(u,v) = (u+v, u-v, 4uv), (u,v) \in \mathbb{R}^2,$$
$$g_2(u,v) = (u \cdot \cosh v, u \cdot \sinh v, u^2), (u,v) \in \mathbb{R}^2, u \neq 0,$$

lokale Karten von M sind.

(6 Punkte)

4) Sei $S^1 := \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}, N = (0,1)$- der Nordpol und $\pi : \mathbb{R} \to S^1 \setminus \{N\}$ die stereographische Projektion, d.h. $\pi(r) =$ der Schnittpunkt von $S^1 \setminus \{N\}$ mit dem Strahl von N nach $(r,0)$.

Leiten Sie eine Formel für $\pi(r)$ her.

(Sie dürfen Elementargeometrie, z.B. den Strahlensatz, verwenden.)

(6 Punkte)

Abgabe: Bis 15. Dezember vor Vorlesungsbeginn im Postfach Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin.

Aufgaben zum Üben der neuen Konzepte

I) Zeigen Sie, daß folgende Abbildungen Immersionen sind:

a) $f(x,y) = (x+y, x-y, 2x^2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$

b) $f(t) = (\frac{1}{t}\cos t, \frac{1}{t}\sin t), \quad t \in (0,\infty),$

c) $f(x) = (q(x), g(x)), x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, q : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ bijektion, $g : \Omega \to \mathbb{R}^{n-d}, g \in C^1(\Omega)$.
(Im Fall $q(x) = x$ heißt $f(x)$ die *Parametrisierung* des Graphes von g.)

II) Prüfen Sie, ob folgende Mengen Untermannigfaltigkeiten sind. Wenn ja, geben Sie ihre Dimension an.

a) $M_a := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = a\}, \quad a \geq 0,$

b) $M_\varphi := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \varphi(x,y)\}, \quad \varphi \in C^1(\mathbb{R}^2),$

c) $M_a := \{x^2 + y^2 - 2z = 4, y^2 + z = a\}, a \in \mathbb{R},$

d) $M := \{x^2 + y^2 = z^2, xy = z + 1\}.$

III) Geben Sie lokale Karten für $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -x^2 - y^2 + z^2 = 1\}$ an.