Prof. Dr. Daniel Grieser
Dr. Gohar Harutyunyan

14. Dezember 2006

8. Übungsblatt zur Analysis III

1) I) d), f), h).

(je 2 Punkte)

2) II) a), c), III) b).

(je 2 Punkte)

3) Der Graph von $f(x, y) = x^2 + y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, heißt *Paraboloid*. Berechnen Sie die Fläche und den Schwerpunkt des Teils des Paraboloids, der unterhalb der Ebene $z = a$ liegt (für $a > 0$).

   Der *Schwerpunkt* einer n-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^N$ ist der Punkt $s = (s_1, \ldots, s_N) \in \mathbb{R}^N$ mit

$$s_i = \frac{1}{\mathrm{vol}_n(M)} \int\limits_M x_i dS(x)$$

   (falls die Integrale existieren).

(6 Punkte)

4) (**Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^N$**)

   Sei $N \geq 3$. Das Kreuzprodukt ist eine Operationen, die $N-1$ Vektoren $v_1, \ldots, v_{N-1}$ im $\mathbb{R}^N$ einen Vektor $v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_{N-1} \in \mathbb{R}^N$ zuordnet. Per Definition ist $v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_{N-1}$ derjenige Vektor v, für den gilt:

$$\det(w, v_1, v_2, \ldots, v_{N-1}) = \langle w, v \rangle \quad \forall w \in \mathbb{R}^N$$

   ($\langle\ ,\ \rangle$ ist das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^N$). Zeigen Sie:

   a) Die i-te Komponente von $v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_{N-1}$ ist gleich $\det(e_i, v_1, \ldots, v_{N-1})$, und damit gleich $(-1)^{i-1}$ mal der Determinante der $(N-1) \times (N-1)$ Matrix, die aus $(v_1, \ldots, v_{N-1})$ durch Streichen der i-ten Zeile entsteht.

   b) $v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_{N-1}$ steht senkrecht auf jedem v_i, und $\|v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_{N-1}\|$ ist das $(N-1)$-dimensionale Volumen des von $v_1, \ldots, v_{N-1}$ aufgespannten Parallelotops.

   c) Für $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ gilt $\|v_1 \times v_2\|^2 = \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 - \langle v_1, v_2 \rangle^2$.

   d) Die Gramsche Determinante für eine Hyperfläche (d.h. $(N-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^N$) bezüglich einer lokalen Karte ϕ ist

$$\|\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \times \cdots \times \frac{\partial \phi}{\partial x_{N-1}}\|^2$$

(je 1,5 Punkte)

5) **Extra:** Zeigen Sie, dass für $a_1, \ldots, a_{N-1} \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ a_2 \end{pmatrix} \times \cdots \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ a_{N-1} \end{pmatrix} = (-1)^N \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N-1} \\ -1 \end{pmatrix}$$

   und folgern Sie, dass die Gramsche Determinante für den Graphen einer Funktion $g : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^{N-1}$, gleich $1 + \|\nabla g\|^2$ ist.

(2 Extrapunkte)

Abgabe: Bis 22. Dezember vor Vorlesungsbeginn im Postfach Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin.

Aufgaben zum Üben der neuen Konzepte

I) Bestimmen Sie den Tangentialraum an M in den angegebenen Punkten. ('Bestimmen' heißt: Geben Sie eine Basis des Tangentialraums an.)

a) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}, \quad p = (1,0)$ und $p = (\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$.

b) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}, \quad p = (\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7})$

c) $M =$ die Untermannigfaltigkeit von Übungsblatt 7, II d).

d) $M = M_6$ von Übungsblatt 7, II c), $p = (2,2,2)$.

e) $M =$ das Bild der Immersion f von Übungsblatt 7, I) b).

f) $M =$ das Bild der Immersion f von Übungsblatt 7, I a), $p = (2,0,2)$.

g) Der Graph von $g(x,y) = \sin x + \cos y + 1$ bei $x = y = 0$.

h) Der Graph von $g(x,y) = x^2 + y^2$ (Paraboloid) bei $x = 1$, $y = -2$.

II) Berechnen Sie die Länge der Kurven.

a) $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$ (ein Bogen der Zykloide)

b) Der Graph der Gerade $y = cx$, $x \in [0,a]$ (vgl. Pythagoras!).

c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2/2,\ x \in [0,a]\}$ (Parabel).
Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $x = \sinh t$. Die wichtigsten Eigenschaften der *hyperbolischen Funktionen* (Kosinus hyperbolicus oder 'Kosch', Sinus hyperbolicus oder 'Sinsch')

$$\cosh t := \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \ \sinh t := \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

sind (sehr einfach nachzurechnen!):

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1,\ \cosh(2t) = 2\cosh^2 t - 1,\ \sinh(2t) = 2 \sinh t \cosh t$$

$$\cosh' = \sinh,\ \sinh' = \cosh$$

$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ ist ein Diffeomorphismus mit Umkehrfunktion}$$

$$\operatorname{arsinh} x := \log(x + \sqrt{1 + x^2})$$

III) Bestimmen Sie den Flächeninhalt.

a) Der Graph von $f(x,y) = \sin x + \cos y$ für $x, y \in [0, \pi]$ (Sie brauchen das Integral nicht auszurechnen).

b) Das von $(1,2,3)$ und $(-1,2,1)$ aufgespannte Parallelogramm. (Einmal mittels der Gramschen Determinante und einmal mittels Aufgabe 4.)

c) Das Bild der Immersion f von Übungsblatt 7, Ia), für $x \in [0,1], y \in [-1,1]$. (Sie können 4d) verwenden.)

d) Das Ellipsoid mit Halbachsen $a, b, c > 0$: $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 + (\frac{z}{c})^2 = 1\}$. (Sie brauchen das Integral nicht auszurechnen.)