Prof. Dr. Daniel Grieser
Dr. Gohar Harutyunyan

21. Dezember 2006

# 9. Übungsblatt zur Analysis III

1) I) b), c)

(je 3 Punkte)

2) Sei $V(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Berechnen Sie die Kurvenintegrale von $V$ längs der folgenden geschlossenen Kurven (alle sollen einmal positiv, also gegen den Uhrzeigensinn durchlaufen werden).

   a) Der Kreis um den Nullpunkt vom Radius $r$.

   b) Ein achsenparalleles Rechteck Ihrer Wahl, das den Nullpunkt im Innern enthält.

   c) Ein achsenparalleles Rechteck Ihrer Wahl, das den Nullpunkt nicht im Innern enthält.

(je 2 Punkte)

3) Sei $(X,d)$ ein metrischer Raum. Auf $X$ erkläre eine Relation $\sim$ wie folgt:
Für $p,q \in X$ sei $p \sim q :\Longleftrightarrow$ es gibt eine stetige Kurve $\gamma : I \to X$ (mit einem abgeschlossenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$) mit Anfangspunkt $p$ und Endpunkt $q$.

   a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist (d.h. für alle $p,q,r \in X$ gilt I) $p \sim p$, II) $p \sim q \Rightarrow q \sim p$, III) $p \sim q, q \sim r \Rightarrow p \sim r$)

   b) Die Äquivalenzklassen von $\sim$ heißen **Wegzusammenhangskomponenten** von $X$. $X$ heißt **wegzusammenhängend**, wenn es aus genau einer Komponente besteht.
   Zeigen Sie: Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, so sind alle Wegzusammenhangskomponenten von $U$ offen.

   c) Zeigen Sie, dass eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ höchstens abzählbar viele Wegzusammenhangskomponenten hat.

   d) (Extra) Zeigen Sie, dass die Cantor-Menge total weg*un*zusammenhängend ist, d.h. dass jede Wegzusammenhangskomponente aus genau einem Punkt besteht.

(je 2 Punkte, plus 2 Extra-Punkte)

4) Sei $R$ das Vektorfeld $R(x,y) = (-y,x)$ auf $\mathbb{R}^2$. ($R$ steht für Rotieren. Warum wohl (Skizze)?)
$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sei eine stückweise $C^1$-Kurve, für die gilt:

   - $\langle R(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle > 0 \ \forall t$ (dies bedeutet, dass $\gamma$ sich gegen den Uhrzeigensinn um den Nullpunkt bewegt; warum (Skizze)?).
   - Keine zwei der Vektoren $\gamma(t)$ für $t \in [a,b]$ sind parallel (das bedeutet, dass $\gamma$ den Nullpunkt höchstens einmal umrundet).

   Zeigen Sie, dass die vom 'Fahrstrahl' von $\gamma$ überstrichene Fläche, $\{r\gamma(t) : \ r \in [0,1], t \in [a,b]\}$, den Flächeninhalt

$$\frac{1}{2}\int_\gamma R = \frac{1}{2}\int_a^b (x'y - y'x)\,dt$$

   hat (wobei $\gamma(t) = (x(t), y(t))$).
   (Hinweis: Transformationsformel.)

(6 Punkte)

**Bemerkung**: Später werden wir sehen, dass für geschlossene, injektive Kurven $\gamma$ der Inhalt der von $\gamma$ eingeschlossenen Fläche durch die angegebene Formel berechnet werden kann, auch wenn $\gamma$ nicht die zwei Bedingungen erfüllt.

**Abgabe:** Bis 12. Januar 2007 vor Vorlesungsbeginn im Postfach Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin.

## Aufgaben zum Üben der neuen Konzepte

I) Berechnen Sie die Kurvenintegrale $\int\limits_\gamma V$.

a) $V(x,y) = (x, x+y)$, $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0,\pi]$, $\gamma_2(t) = (1-2t, 0), t \in [0,1]$ (beides sind Wege von $(1,0)$ nach $(-1,0)$).

b) $V(x,y,z) = (xy, yz, zx)$, $\gamma(t) = (t, t^2, t^3), t \in [0,2]$.

c) $V(x,y,z) = (yz, xz, xy)$, $\gamma(t) = (e^{\sin t}, \frac{1}{1+t}, t^{3/2}), t \in [0,\pi]$.

II) Bestimmen Sie eine Stammfunktion für das Vektorfeld $V$.

a) $V(x,y,z) = (x^2 - yz, y^2 - xz, z^2 - xy)$ auf $\mathbb{R}^3$.

b) $V(x) = \frac{x}{\|x\|^a}$ für $x \in \mathbb{R}^n$, wobei $a \in \mathbb{R}$.