Prof. Dr. Daniel Grieser
Dr. Gohar Harutyunyan

08.Januar 2007

1. Lösungsblatt zur Analysis III
(zur Wiederholung)

1) a) Sei $A = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$, $\quad B = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \neq 0\}$ und $C = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) + g(x) \neq 0\}$. Dann $A \cup B$ ist eine Nullmenge und $C \subset A \cup B$. Also ist C eine Nullmenge.

Oder: $||f+g||_1 \leq ||f||_1 + ||g||_1 = 0 + 0 = 0$.

b) Sei χ_A, χ_B und $\chi_{A\times B}$ die charakteristische Funktionen von A, B und $A \times B$. Dann

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} \chi_{A\times B} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A dx \cdot \int_{\mathbb{R}^m} \chi_B dx = 0,$$

also ist $A \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$ eine Nullmenge.

2) Die Konvergenz des Integrals

$$\int_E \frac{\varphi(x,y)}{(1+x^2+y^2)^p} dxdy$$

ist äquivalent zu der Konvergenz des Integrals

$$\int_E \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^p}. \tag{1}$$

Sei $E_n = [-n, n] \times [0, 1], n \in \mathbb{N}$. Dann

$$\int_{E_n} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^p} = \int_0^1 \left(\int_{-n}^{n} \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^p} \right) dy.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \int_{E_n} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^p} = \infty$ wenn $p \leq 0$, also divergiert das Integral (1). Für $p > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_{-n}^{n} \frac{dx}{(2+x^2)^p} \\
&= \int_0^1 \left(\int_{-n}^{n} \frac{dx}{(2+x^2)^p} \right) dy \leq \int_0^1 \left(\int_{-n}^{n} \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^p} \right) dy \leq \int_0^1 \left(\int_{-n}^{n} \frac{dx}{(1+x^2)^p} \right) dy \\
&= \int_{-n}^{n} \frac{dx}{(1+x^2)^p}.
\end{aligned}$$

Dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(2+x^2)^p} \leq \int_E \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^p} \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^p}, p > 0,$$

also konvergiert (1) wenn $2p > 1 \Leftrightarrow p > \frac{1}{2}$, und divergiert wenn $p \leq \frac{1}{2}$.

3) Definiere

$$f_n(x) := \begin{cases} n^{m+1}, & x \in (1-\frac{1}{n}, 1)^m =: Q_n \\ 0, & x \in Q \setminus Q_n \end{cases}.$$

Fixiere $x \in Q$. Dann gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß $x \in Q \setminus Q_n$, also $f_n(x) = 0$ wenn $n \geq n_0$, also

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

Andererseits

$$\int_Q f_n(x)dx = \int_{Q_n} f_n(x)dx = \underbrace{\int\limits_{1-1/n}^{1} \cdots \int\limits_{1-1/n}^{1}}_{m \text{ Mal}} n^{m+1} dx_1 \dots dx_m = n^{m+1} \cdot \frac{1}{n^m} = n,$$

also

$$\lim_{n\to\infty} \int_Q f_n(x)dx = \infty.$$

4) a) $\int_D (x^2+y^2)dxdy; \quad \partial D = \{(x,y) : (x^2+y^2)^2 = a^2xy\}$.
D und x^2+y^2 sind symmetrisch bezüglich des Ursprungs.
Mittels Polarkoordinaten: $\partial D = \{(r,\varphi) : r^2 = \frac{a^2}{2}\sin 2\varphi\} = \{(r,\varphi) : \varphi \in [0,\frac{\pi}{2}] \cup [\pi, \frac{3\pi}{2}], r = \frac{|a|}{\sqrt{2}}\sqrt{\sin 2\varphi}\}$. Also

$$\begin{aligned}\int\limits_D (x^2+y^2)dxdy &= 2\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\frac{|a|}{\sqrt{2}}\sqrt{\sin 2\varphi}} r^3 dr d\varphi = 2\int\limits_0^{\pi/2}\Big(\frac{r^4}{4}\Big|_0^{\frac{|a|}{\sqrt{2}}\sqrt{\sin 2\varphi}}\Big)d\varphi = \frac{a^4}{8}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 2\varphi d\varphi \\ &= \frac{a^4}{8}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4\varphi}{2}d\varphi = \frac{a^4}{8}\Big(\frac{1}{2}\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{8}\Big)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^4}{32}.\end{aligned}$$

b) Setze

$$x+y+1 =: u, \quad 2x+3y-1 =: v,$$

also

$$T(u,v) = (x,y) = (3u-v-4, 3-2u+v), \quad \det T = \det\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

und

$$\begin{aligned}\int_D dxdy &= \int_{D'} dudv \, (D' = \{(u,v) : u^2+y^2 \leq 1\}) = \int_{-1}^{1}\Big(\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} dv\Big)du \\ &= 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}du = (u\sqrt{1-u^2} + \arcsin u)\Big|_{-1}^{1} \\ &= 2\arcsin 1 = \pi.\end{aligned}$$

c) Verwendet man in der $x-y$-Ebene Polarkoordinaten, so ist der Körper durch folgende Flächen beschränkt:

$$r^2 = a^2\cos 2\varphi, \quad r^2+z^2 = a^2.$$

Dann

$$\begin{aligned}
\int_D dxdydz &= 4\int_0^{\pi/4}\Big(\int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}}\Big(\int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}} dz\Big)rdr\Big)d\varphi = 8\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}}\sqrt{a^2-r^2}rdr\right)d\varphi \\
&= -\frac{8}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left((a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{r=0}^{a\sqrt{\cos 2\varphi}}\right)d\varphi = -\frac{8}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left((a^2-a^2\cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}}-a^3\right)d\varphi \\
&= \frac{8}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sqrt{8}\sin^3\varphi)d\varphi = \frac{8}{3}a^3\left(\frac{\pi}{4}-\sqrt{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\varphi d\varphi\right) \\
&= \frac{8}{3}a^3\left(\frac{\pi}{4}+\sqrt{8}\left(\cos\varphi-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{8}{3}a^3\left(\frac{\pi}{4}+2\sqrt{2}\left(\frac{5\sqrt{2}}{12}-\frac{2}{3}\right)\right) \\
&= a^3\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{40}{9}-\frac{32\sqrt{2}}{9}\right).
\end{aligned}$$

5) Das Volumen einer Kugel ist proportional zu R^3, also ist

$$\mathrm{Vol}_3(K_{3R}) = 27\cdot\mathrm{Vol}_3(K_R).$$

Die Oberfläche einer Kugel ist proportional zu R^2, also ist

$$\mathrm{Vol}_2(\partial K_{3R}) = 9\cdot\mathrm{Vol}_2(\partial K_R)$$

Sei $K\subset\mathbb{R}^3$ ein beliebiger Körper. Eine geeignete Verallgemeinerung von 'den Radius verdreifachen' ist, alle Dimensionen zu verdreifachen, d.h. mit der Abbildung $T(p)=3p,\ p\in\mathbb{R}^3$ den Körper $T(K)$ zu betrachten. Da T eine lineare Abbildung mit Determinante 3^3 ist, folgt $\mathrm{vol}(T(K)) = 27\,\mathrm{vol}(K)$.

Ist $M\subset\mathbb{R}^3$ eine Fläche (z.B. die Oberfläche von K, falls diese eine Mannigfaltigkeit ist), so gilt analog $\mathrm{vol}_2(T(M)) = 3^2\,\mathrm{vol}_2(M)$. Ausführlicher Beweis: Ist $\varphi: U\to V\subset M$ eine lokale Karte für M, so ist $T\circ\varphi: U\to T(V)\subset T(M)$ eine lokale Karte für $T(M)$. Offenbar ist $(T\circ\varphi)(x) = 3\varphi(x)$, also gilt für die Gramsche Determinante

$$g_{T\circ\varphi} = \det\left[3^2(D\varphi)^tD\varphi\right] = 3^4\det\left[(D\varphi)^tD\varphi\right]$$

(das erste Quadrat kommt von den zwei φ-Faktoren, das zweite daher, dass die Determinante einer 2×2-Matrix genommen wird) und daher $\sqrt{g_{T\circ\varphi}} = 3^2\sqrt{g_\varphi}$.

6) Hier ist die lineare Abbildung $T(x,y,z) = (3x,y,z)$, mit Determinante 3. Daher ist $\mathrm{vol}(T(K)) = 3\,\mathrm{vol}(K)$. Über die Oberfläche kann man allgemein nichts sagen, außer dass sie sich vergrößert. (Betrachten Sie etwa Quader, die in der x-Richtung sehr schmal sind, und solche, die in der x-Richtung sehr breit sind.)

7) a) $M = \{(x,y,z): xy = z\}$.
M ist eine Untermannigfaltigkeit (Graph der Funktion $g(x,y) = xy$) mit $\mathrm{Dim}\,M = 2$ (vgl. mit II) b) auf dem Übungsblatt 7).
Lokale Karten: $\varphi(x,y) = (x,y,xy), x,y\in\mathbb{R}$.
Der Tangentialraum in $p = (1,1,1)$:

$$T_pM = \mathrm{Bild}\,D\varphi|_{\varphi^{-1}(p)} = \mathrm{Bild}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\y&x\end{pmatrix}\Bigg|_{(1,1)} = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

b) $M = \{(x,y,z): x^2+y^2-z^2 = a\}$.
$M = f^{-1}(a)$ für $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$. Ferner, $\nabla f = (2x,2y,-2z)$ ist linear abhängig *nur* wenn $x=y=z=0$. Dieser Punkt $\in M$ *nur* wenn $a=0$. In diesem Fall ist M keine

Mannigfaltigkeit (in einer Umgebung von $(0,0,0)$ ist kein Graph).
Im Fall $a \neq 0$ ist M eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit. (Vgl. Skript Seite 52)
Lokale Karten: Für $a < 0$: $\varphi(x,y) = (x, y, \sqrt{x^2+y^2-a}), x, y \in \mathbb{R}$, für den Teil mit $z > 0$ und $\varphi(x,y) = (x, y, -\sqrt{x^2+y^2-a}), x, y \in \mathbb{R}$, für den Teil mit $z < 0$.
Für $a > 0 : f(z,\varphi) = (\sqrt{z^2+a}\cos\varphi, \sqrt{z^2+a}\sin\varphi, z)$.
Der Tangentialraum in $p = (1, 1, \sqrt{2-a}), a < 0$:

$$T_pM = \text{Bild}\, D\varphi|_{(1,1)} = \text{Bild}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-a}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-a}} \end{pmatrix}\Bigg|_{(1,1)} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2-a}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2-a}} \end{pmatrix}\right\}.$$

c) $M = \{(x,y,z) : x^2+y^2 = 4, y^2+az = 1\}$.

Wenn $a = 0$ besteht M aus 4 disjunkten Geraden: $(\sqrt{3}, 1, z), (-\sqrt{3}, 1, z), (\sqrt{3}, -1, z), (-\sqrt{3}, -1, z), z \in \mathbb{R}$, ist also eine Mannigfaltigkeit.

Sei $a \neq 0$. $M = f^{-1}(0)$ für $f(x,y,z) = (\underbrace{x^2+y^2-4}_{f_1}, \underbrace{y^2+az-1}_{f_2})$. Ferner, $\nabla f_1(x,y,z) = (2x, 2y, 0), \nabla f_2(x,y,z) = (0, 2y, a)$ sind linear unabhängig für $\forall (x,y,z) \in M$.
Also ist M eine Untermannigfaltigkeit mit $\text{Dim}\, M = 1$.
Lokale Karten: $f(\varphi) = (2\cos\varphi, 2\sin\varphi, \frac{1}{a}(1-4\sin^2\varphi)), \varphi \in$ offene Intervalle in R der Länge $< 2\pi$.
Der Tangentialraum in $p = (2, 0, 1/a)$: Für $f(x,y,z) = (x^2+y^2, y^2+az)$

$$Df|_p = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 0 & 2y & a \end{pmatrix}\Bigg|_p = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Dann

$$T_pM = \text{Kern}\left(\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}\right) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

d) $M =$ das Bild von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (r,\varphi) \to (r\cos\varphi, r\sin\varphi, r)$.
M ist den Graph der Funktion $z = \sqrt{x^2+y^2}$, die im Anfangspunkt nicht differenzierbar ist.
M ist keine Mannigfaltigkeit (vgl. Skript S. 52).

8) a) M ist das Bild der Immersion $f(x,y) = (x+y, x-y, x^2-y^2) \quad (x,y) \in [0,1]^2, n = 2$.
Wir haben

$$g_f(x,y) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2x \\ 1 & -1 & -2y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2x & -2y \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 2+4x^2 & -4xy \\ -4xy & 2+4y^2 \end{pmatrix} = 4(1+2x^2+2y^2).$$

Dann

$$\text{vol}_2(M) = 2\int_0^1\int_0^1 \sqrt{1+2x^2+2y^2}\,dxdy$$

b) $M = \{(x,y,z) : x^2+y^2 = z^2, y^2 = ax, a < x < 2a\}, n = 1$.
M ist eine Kurve, die bezüglich $x-z$- und $x-y$-Ebenen symmetrisch ist. Dann

$$\text{vol}_1(M) = 4\text{vol}_1(M'),$$

wo $M' = \{(x,y,z) \in M : x > 0, y > 0, z > 0\}$. Also M' ist die Kurve $\gamma(x) = (x, \sqrt{ax}, \sqrt{x^2+ax}), x \in (a, 2a)$, und

$$\text{vol}_1(M) = 4\int_a^{2a} ||\gamma'||dx = 4\int_a^{2a}\sqrt{1+\frac{a}{4x}+\frac{(2x+a)^2}{4(x^2+ax)}}dx.$$

c) $a_1 = (-1,0,1), a_2 = (2,1,3)$.

$$P(a_1,a_2) = \{t_1 a_1 + t_2 a_2 = (-t_1 + 2t_2, t_2, t_1 + 3t_2) =: p(t_1,t_2), t_1, t_2 \in [0,1]\}.$$

Dann

$$g_p(t_1,t_2) = \det\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 14 \end{pmatrix} = 27.$$

Also $\mathrm{vol}_2(P) = 3\sqrt{3}$.

Oder , nach Aufgabe 4), Übungsblatt 8

$$\mathrm{vol}_2(P) = ||v|| \quad \text{für} \quad v = (v_1,v_2,v_3) = (-1,0,1) \times (2,1,3),$$

wo $v_1 = -1, v_2 = 5, v_2 = -1$. Also

$$\mathrm{vol}_2(P) = 3\sqrt{3}.$$

9) Sei $\varphi : U \to V \subset S^{n-1}$ eine lokale Karte für S^{n-1}. Dann ist $\widetilde{\varphi}(r,y) = r\varphi(y)$ eine lokale Karte $(0,\infty) \times U \to \tilde{V} = \{r\omega : \omega \in V\}$ für $\mathbb{R}^n$, denn jeder Punkt $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$, hat eine eindeutige Darstellung in der Form $x = r\omega, \quad 0 < r < \infty, \omega \in S^{n-1}$.

Es gilt

$$\begin{aligned} \det D\widetilde{\varphi} &= \det\left(\partial_r \widetilde{\varphi}, \partial_{y_1}\widetilde{\varphi}, \ldots, \partial_{y_{n-1}}\widetilde{\varphi}\right) = \det\left(\varphi, r\partial_{y_1}\varphi, \ldots, r\partial_{y_{n-1}}\varphi\right) \\ &= r^{n-1} \det\left(\varphi, \partial_{y_1}\varphi, \ldots, \partial_{y_{n-1}}\varphi\right) \end{aligned}$$

und

$$\det\left(\varphi, \partial_{y_1}\varphi, \ldots, \partial_{y_{n-1}}\varphi\right)^2 = g_\varphi,$$

da $\|\varphi\| = 1$ und $\varphi \perp \partial_{y_i}\varphi$ für alle i ist (denn $\varphi(y)$ liegt auf der Einheitssphäre und $\partial_{y_i}\varphi(y)$ ist ein Tangentialvektor an die Einheitssphäre im Punkt $\varphi(y)$) – vgl. Satz und Definition 3.2.1 –, also folgt mit der Transformationsformel und Fubini

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{V}} f(x)\,dx &= \int_0^\infty \int_U f(\widetilde{\varphi}(r,y)) |\det D\widetilde{\varphi}_{|(r,y)}|\,dy\,dr = \int_0^\infty \int_U f(r\varphi(y)) \sqrt{g_\varphi(y)}\, r^{n-1}\,dy\,dr \\ &= \int_0^\infty \int_V f(r\omega)\,dS(\omega)\, r^{n-1}\,dr \end{aligned}$$

Summation über Kartengebiete ergibt die Behauptung.

Wer es konkret mag, kann konkrete Karten verwenden, z.B. **allgemeine Kugelkoordinaten**: Sei $S^{n-1} \ni A = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$. Dann wird A eindeutig durch $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ definiert, wo

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \cos\varphi_1, \\ \omega_2 &= \sin\varphi_1 \cos\varphi_2, \\ &\vdots \\ \omega_{n-1} &= \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-2} \cos\varphi_{n-1}, \\ \omega_n &= \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-2} \sin\varphi_{n-1}, \end{aligned}$$

$\varphi_i \in [0,\pi], i = 1, \ldots, n-2, \varphi_{n-1} \in [0, 2\pi]$. (die Eindeutigkeit gilt für $\varphi_i \in (0,\pi)$, $i = 1, \ldots, n-2$, $\varphi_{n-1} \in (0,2\pi)$, das ist in der Nullmenge $\{\omega_n = 0\}$ enthalten.)

Lösung mit diesen Koordinaten: Betrachte die Transformation

$$T : (r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \to (x_1, \ldots, x_n), x_i = r\omega_i, i = 1, \ldots, n.$$

Dann

$$\det DT|_{(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})} = r^{n-1} \sin^{n-2}\varphi_1 \sin^{n-3}\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-2}.$$

Also, nach Transformationsformel

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx &= \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^{2\pi} \underbrace{\int\limits_0^\pi \dots \int\limits_0^\pi}_{n-2 \text{ Mal}} f(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}) \sin^{n-2}\varphi_1 \sin^{n-3}\varphi_2 \dots \sin\varphi_{n-2} d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-2} d\varphi_{n-1} \right) r^{n-1} dr \\
&= \text{(nach Transformationsformel, s. oben die Darstellungen für } \omega_1,\dots,\omega_{n-1}\text{)} \\
&\quad \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(r\omega) r^{n-1} dr d\omega.
\end{aligned}
$$