Prof. Dr. Daniel Grieser
Dr. Gohar Harutyunyan 22. Dezember 2006

1.Übungsblatt zur Analysis III
(zur Wiederholung)

Themen: · Lebesgue-Integral · Nullmengen, Nullfunktionen · Konvergenzsätze · Satz von Fubini · Transformationsformel · Untermannigfaltigkeiten · Integration über Untermannigfaltigkeiten.

1) Zeigen Sie:

   a) f und g sind Nullfunktionen $\Rightarrow f + g$ ist eine Nullfunktion.

   b) $A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}^m$ Nullmengen $\Rightarrow A \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$ ist eine Nullmenge.

2) Prüfen Sie, ob das Integral existiert:

$$\int_E \frac{\varphi(x,y)}{(1+x^2+y^2)^p} dxdy, \quad p \in \mathbb{R}, \quad E = \mathbb{R} \times [0,1], \quad 0 < m \leq |\varphi(x,y)| \leq M.$$

3) Geben Sie eine Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von auf $Q = (-1,1)^m$ integrierbaren Funktionen an, die punktweise auf Q gegen 0 konvergiert, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \quad x \in Q,$$

aber

$$\lim_{n\to\infty} \int_Q f_n(x)dx = \infty$$

(vgl. mit dem Satz 1.5.3).

4) Wählen Sie geeignete Variablenwechsel und berechnen Sie die Integrale:

   a) $\int\limits_D (x^2+y^2)dxdy$;
   D ist die Fläche mit $\partial D = \{(x,y) : (x^2+y^2)^2 = a^2xy\}$.

   b) (Flächeninhalt)

$$\int_D dxdy;$$

   D ist die Fläche mit $\partial D = \{(x,y) : (x+y+1)^2 + (2x+3y-1)^2 = 1\}$.

   c) (Volumen)

$$\int_D dxdydz;$$

   D ist der Körper, der durch folgende Flächen beschränkt ist:

$$x^2+y^2+z^2 = a^2, \quad (x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2).$$

5) Wenn Sie den Radius einer Kugel verdreifachen, wie ändert sich das Volumen? Wie ändert sich die Oberfläche? Stimmt etwas analoges für andere Körper?

6) Wenn Sie die x-Koordinate in $\mathbb{R}^3$ um den Faktor 3 strecken, wie ändert sich das Volumen eines Körpers? Wie ändert sich die Oberfläche eines Körpers?

7) Prüfen Sie, ob folgende Mengen Untermannigfaltigkeiten sind. Wenn ja, geben Sie lokale Karten an und bestimmen Sie die Tangentialräume in $p \in M$ (p-nach Ihrem Wahl):

a) $M = \{(x, y, z) : xy = z\}$.

b) $M = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 = a\}$.

c) $M = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 4, y^2 + az = 1\}$.

d) $M =$ das Bild von $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (r, \varphi) \to (r \cos\varphi, r \sin\varphi, r)$.

8) Berechnen Sie $\mathrm{vol}_n(M)$ für folgende Untermannigfaltigkeiten:

a) M ist das Bild der Immersion

$$f(x, y) = (x + y, x - y, x^2 - y^2), \quad (x, y) \in [0, 1]^2, \quad n = 2.$$

b) $M = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2, y^2 = ax, a < x < 2a\}, n = 1$.

c) Berechnen Sie die Fläche des von $(-1, 0, 1)$ und $(2, 1, 3)$ aufgespannte Parallelogramms, $n = 2$.

9) (Etwas schwieriger) Zeigen Sie:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(r \cdot \omega)d\omega \; r^{n-1} \, dr \quad \text{mit} \quad S^{n-1} = \{\omega \in \mathbb{R}^n : ||\omega|| = 1\}.$$