Prof. Dr. Daniel Grieser
Dr. Gohar Harutyunyan

8. Februar 2007

2.Übungsblatt zur Analysis III
(zur Wiederholung)

Sehen Sie sich auch das 1. Übungsblatt zur Wiederholung, die regulären Übungsblätter und die Klausur vom 19.1. an (siehe Webseite).

1) Sei $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^4 + z^4 = 1\}$. Zeigen Sie, dass M eine Untermgfk ist. Bestimmen Sie den Tangentialraum in einem beliebigen Punkt von M. Geben Sie einen Integralausdruck für die Oberfläche von M an. Sie brauchen das Integral nicht auszurechnen.

2) Bestimmen Sie ein Einheitsnormalenfeld für die Mengen
   a) den Graphen von $f(x, y) = x^2 + y^3$ in $\mathbb{R}^3$
   b) den Graphen von $f(x) = \cos x$ in $\mathbb{R}^2$

3) Sei u eine C^1-Funktion auf $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, die im Innern von M harmonisch ist. Zeigen Sie, dass $\int_0^{2\pi} ((\cos\varphi)u_x(\cos\varphi, \sin\varphi) + (\sin\varphi)u_y(\cos\varphi, \sin\varphi)) = 0$, wobei u_x, u_y die partiellen Ableitungen nach x bzw. y bezeichnen.

4) Haben folgende Vektorfelder auf $\mathbb{R}^2$ eine Stammfunktion? Wenn ja, geben Sie eine an.
   a) $V(x, y) = (e^x \sin y, e^x \cos y)$
   b) $V(x, y) = (e^x \cos y, e^x \cos y)$
   c) $V(x, y) = (0, f(x, y))$ (Bedingung an f?)
   d) $V(x, y) = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$
   e) wie in (b), aber auf $x > 0$.

5) Richtig oder falsch?
   a) der Träger einer Funktion ist immer abgeschlossen ??
   b) konvergiert $f_k \to f$ punktweise und sind alle f_k und f integrierbar, so konvergiert $\int f_k \to \int f$??
   c) dasselbe mit gleichmäßiger Konvergenz $f_k \to f$??
   d) sind f, g integrierbar auf $\mathbb{R}$, dann ist $f \cdot g$ integrierbar??
   e) eine konstante Funktion ist harmonisch??
   f) für jede beschränkte harmonische Funktion auf $K_1(0)$ mit $u(0) = 0$ gilt $\int\limits_{K_1(0)} u = 0$??
   g) ist $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und V ein C^1-Vektorfeld auf U mit $\operatorname{div} V \equiv 0$, so gilt $\int_\gamma V = 0$ für jede geschlossene Kurve in U??

Lösungsskizzen

1) $M = f^{-1}(1)$ mit $f(x,y,z) = x^4+y^4+z^4$. $\nabla f(x,y,z) = 4(x^3,y^3,z^3) \neq 0$ auf M, da $(0,0,0) \notin M$, also ist M Umgfk. Der Tangentialraum im Punkt $(x,y,z) \in M$ ist $\{v \in \mathbb{R}^3 : Df_{|(x,y,z)}(v) = 0\} = \{(v_1,v_2,v_3) : v_1x^3 + v_2y^3 + v_3z^3 = 0\}$. Es gilt $(x,y,z) \in M \Leftrightarrow z^4 = 1 - x^4 - y^4 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt[4]{1-y^4-z^4}$ und $y^4 + z^4 \leq 1$, also ist M Vereinigung der Graphen der beiden Funktionen $f_\pm(y,z) = \pm\sqrt[4]{1-y^4-z^4}$ auf $D = \{(y,z) : y^4+z^4 < 1\}$, und des Äquators $x = 0$, einer 2-Nullmenge. Wegen Symmetrie folgt, dass die Fläche gleich $2\int\limits_D \sqrt{1+\|\nabla f\|^2} = 2\int\limits_D \sqrt{1+(y^6+z^6)/\sqrt{y^4+z^4}}\,dy\,dz$ ist.

2) Eine Normale an den Graphen von f ist durch $(\nabla f, -1)$ gegeben. Also (a) $(2x, 3y^2, -1)/\sqrt{1+4x^2+9y^4}$, (b) $(\cos x, -1)/\sqrt{1+\cos^2 x}$.

3) Nach dem Satz von Gauß ist mit $V = \nabla u$: $\int_M \operatorname{div} V = \int_{\partial M} \langle V, \nu\rangle dS$. Da $\operatorname{div} V = \Delta u = 0$, ist das gleich null. Für $(x,y) \in \partial M$, also $x^2+y^2 = 1$, ist $\nu(x,y) = (x,y)$, also $\langle V(x,y), \nu(x,y)\rangle = xu_x(x,y) + yu_y(x,y)$. Parametrisiert man den Kreis ∂M durch $\gamma : \varphi \in [0,2\pi] \mapsto (\cos\varphi, \sin\varphi)$, so folgt wegen $\|\gamma'(\varphi)\| = 1\ \forall\varphi$ die Formel.

4) (a) Ja, $e^x \sin y$ (b) Nein, da $\partial V_1/\partial y \neq \partial V_2/\partial x$ (c) Wegen $\partial V_1/\partial y = 0$ ist eine notwendige Bedingung für die Existenz einer Stammfunktion $\partial f/\partial x = 0$, d.h. f ist unabhängig von x. Dies ist auch hinreichend, denn ist $f(x,y) = g(y)$ und G eine Stammfunktion zu g, so ist $(x,y) \mapsto G(y)$ eine Stammfunktion für V. (Wir nahmen hier an, dass g eine Stammfunktion hat, das ist z.B. ok, wenn es stetig ist.) (d) Nein, denn das Integral von V über die geschlossene Kurve $x^2+y^2 = 1$ ist ungleich Null (vgl. Vorlesung). (e) ja, z.B. $\arctan\frac{y}{x}$

5) (a) richtig nach Definition des Trägers als Abschluss einer Menge (b) falsch, vgl. Motivation für Konvergenzsätze im Skript (c) falsch im Allgemeinen (Beispiel: $f_k(x) = \frac{1}{k}\chi_{[-k,k]}, f = 0$), richtig, wenn sich alles auf einer Menge U mit endlichem Volumen abspielt (denn dann ist $|\int_U f_k - \int_U f| \leq \int_U |f_k - f| \leq \operatorname{vol}(U)\sup|f_k - f| \to 0$ für $k \to \infty$) (d) falsch, z.B. $f(x) = g(x) = |x|^{-1/2}\chi_{[-1,1]}(x)$ auf $\mathbb{R}$, (e) richtig (f) richtig nach dem Mittelwertsatz für harmonische Funktionen (die Beschränktheit garantiert, dass das Integral überhaupt definiert ist), (g) falsch; was stimmt, ist folgendes: Hat $V = (V_1, V_2)$ Divergenz gleich null und ist $W = (-V_2, V_1)$ das um 90 Grad gedrehte Vektorfeld, so gilt für jede geschlossene Kurve, die Randkurve eines Gebietes M in U ist, dass $\int_\gamma W = 0$ (Letzteres ist nämlich gleich $\pm\int_{\partial M}\langle V, \nu\rangle\, dS$, das ist null nach dem Satz von Gauss. Beachte auch, dass $\operatorname{div} V = 0$ äquivalent dazu ist, dass W die notwendige Bedingung für die Existenz einer Stammfunktion erfüllt.)