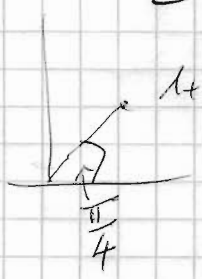
Lösungen Klausur Analysis IV (2-Fach-BS)

1) a)



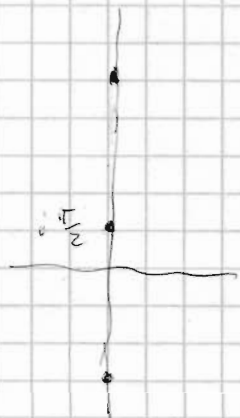
$$|1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Die dritten Wurzeln daraus sind

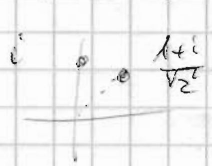
$$\sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{\pi}{12}}, \quad \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{\pi}{4} + i\frac{2\pi}{3}}, \quad \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{\pi}{4} + i\frac{4\pi}{3}}$$

b) $e^w = i$ hat die Lösungen



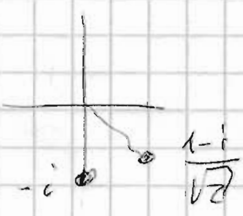
$$w = \log i = \log|i| + i \arg i$$
$$= i\frac{\pi}{2} + 2\pi i k, \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$= i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$$

Da $u^2 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ die Lösungen $u = \pm e^{i\frac{\pi}{4}} = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}$



hat und $u^2 = -i$ die Lösungen

$$u = \pm e^{-i\frac{\pi}{4}} = \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}},$$



hat $e^{z^2} = i$ die Lösungen

$$\pm \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

und $\pm \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{-\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)}, \quad k = -1, -2, \ldots$

2.) a) Der einzige Pol von $\frac{e^z-1}{z^2}$ liegt bei $z=0$, und wegen

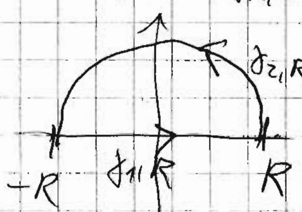
$$\frac{e^z-1}{z^2} = \frac{1+z+\frac{z^2}{2}+\dots-1}{z^2} = \frac{1}{z}+\frac{1}{2}+\dots$$

ist das Residuum gleich 1. Mit dem Residuensatz folgt

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z-1}{z^2}\,dz = 2\pi i$$

b) Sei $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^4+2z^2+1} = \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}$.

f ist holomorph auf $\mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$, mit zweifachen Polen bei $\pm i$. Für $R>1$ sei $\gamma_R = \gamma_{R,1}+\gamma_{R,2}$ der Integrationsweg



Es gilt:

$$\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz \to \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \qquad (R\to\infty)$$

$$\left|\int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,dz\right| \le \text{Länge}(\gamma_{2,R})\cdot\frac{1}{R^4-2R^2-1} \le \frac{2\pi R}{R^4-2R^2-1}$$

$\to 0$ für $R\to\infty$ (wegen $|e^{iz}|\le 1$ für $\operatorname{Im} z \ge 0$)

$$\operatorname{Res}_{z=i}\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} = \frac{d}{dz}\Big|_{z=i}(z-i)^2\cdot\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}$$

$$= \frac{d}{dz}\Big|_{z=i}\frac{e^{iz}}{(z+i)^2} = \left[\frac{i\,e^{iz}}{(z+i)^2} - 2\frac{e^{iz}}{(z+i)^3}\right]_{z=i}$$

$$= e^{-1}\left(\frac{i}{4i^2} - \frac{2}{8i^3}\right) = e^{-1}\left(-\frac{i}{4}-\frac{i}{4}\right) = -\frac{e^{-1}}{2}i$$

also $\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i\cdot\left(-\frac{e^{-1}}{2}i\right) = \frac{\pi}{e}$

Insgesamt $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{\pi}{e}$

3) a) $f(z)$ hat nur einen Pol bei $z=1$.

Mit $w = z-1$ ist

$$f(z) = \frac{e^{w+1}}{w^3} = e \cdot \frac{1+w+\frac{w^2}{2}+\dots}{w^3} = e\cdot\left(\frac{1}{w^3}+\frac{1}{w^2}+\frac{1}{2w}+\dots\right).$$

Also Hauptteil $= \frac{e}{(z-1)^3} + \frac{e}{(z-1)^2} + \frac{e}{2(z-1)}$, Residuum $= \frac{e}{2}$

$g(z)$ hat Pole bei $z = \pm i\sqrt{2}$. $\quad g(z) = \left[(z+i\sqrt{2})(z-i\sqrt{2})\right]^{-1}$

~~$w = z - i\sqrt{2} \Rightarrow g(z) = \frac{1}{w(w+2\sqrt{2}i)} =$~~

Dies sind einfache Pole, und $\mathrm{Res}_{i\sqrt{2}}\, g(z) = \left[\frac{1}{z+i\sqrt{2}}\right]_{z=i\sqrt{2}} = \frac{1}{2i\sqrt{2}}$,

also ist der Hauptteil bei $i\sqrt{2}$ gleich $\frac{1}{2i\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{z-i\sqrt{2}}$.

Analog $\mathrm{Res}_{-i\sqrt{2}}\, g(z) = \left[\frac{1}{z-i\sqrt{2}}\right]_{z=-i\sqrt{2}} = -\frac{1}{2i\sqrt{2}}$, und der

Hauptteil bei $-i\sqrt{2}$ ist $-\frac{1}{2i\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{z+i\sqrt{2}}$.

b) Sei R so gross, dass alle Nullstellen von p im Kreis $|z| < R$ liegen. Dann gilt

$$\int_{|z|=R} \frac{1}{p(z)}\, dz = 2\pi i \sum_{z : p(z)=0} \mathrm{Res}_z \frac{1}{p}.$$

Die rechte Seite ist unabhängig von R, also auch die linke. Andererseits ~~gilt~~ ist mit $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots$:

$$|p(z)| \geq |a_n| \cdot R^n - |a_{n-1}| R^{n-1} - \dots \quad \text{für } |z| = R, \text{ also}$$

$$\left| \int_{|z|=R} \frac{1}{p(z)}\, dz \right| \leq 2\pi R \cdot \frac{1}{|a_n| R^n - |a_{n-1}| R^{n-1} - \dots} \longrightarrow 0 \quad \text{für } R \to \infty,$$

also sind beide Seiten gleich Null.

4) a) Falsch, z.B. $D = \{|z|<1\}$, $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$.

f ist unbeschränkt, da $f(z) \to \infty$ für $z \to 1$.

b) Wahr, da mit der Laurententwicklung (etwa für $z_0 = 0$)

$$f(z) = \dots + \frac{a_{-n}}{z^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

folgt:
$$f'(z) = \dots - \frac{n a_{-n}}{z^{n+1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z^2} + 0 + a_1 + 2a_2 z + \dots$$

Der $\frac{1}{z}$-Term hat Koeffizient Null, also $\operatorname{Res}_0 f' = 0$.

Alternativ: $\operatorname{Res}_{z_0} f' = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} f'(z)\,dz = 0$ für kleines r,

da f' eine Stammfunktion (nämlich f) auf $|z| \leq r$ hat.

c) Wahr. Da f nicht konstant ist, gibt es ein z mit $f'(z) \neq 0$.

$df|_z$ ist dann orientierungserhaltend (positive Determinante).
Da $w \mapsto \bar{w}$ die Orientierung umkehrt, ist $dg|_z$
orientierungsumkehrend, also g nicht holomorph.

(oder: $f = u + iv \Rightarrow g = u - iv = \tilde{u} + i\tilde{v}$, $\tilde{u} = u$, $\tilde{v} = -v$

$u_x = v_y \quad \Rightarrow \quad \tilde{u}_x = -\tilde{v}_y$

$u_y = -v_x \quad\quad \tilde{u}_y = \tilde{v}_x$

$\Downarrow$

C-R-Gleichungen gelten für g nicht, zumindest bei Punkten, wo $u_x \neq 0$ oder $v_x \neq 0$, d.h. $f'(z) \neq 0$.
Da es für $f \neq$ konstant so ein z gibt, ist g nicht holomorph)