Prof. Dr. Daniel Grieser 28. Juni 2007

11. Übungsblatt zur Analysis IV (Funktionentheorie)

1) I)d),e),f) (je 2 Punkte)

2) Zeigen Sie: Ist f holomorph auf dem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ und hat $|f|$ in $z_0 \in D$ ein lokales Minimum, so ist $f(z_0) = 0$ oder f ist konstant. Folgern Sie daraus den Hauptsatz der Algebra.

(6 Punkte)

3) Zeigen Sie: Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $G \subset \mathbb{C}$ eine Gerade. Ist $f : D \to \mathbb{C}$ stetig und auf $D \setminus G$ holomorph, so ist f auf ganz D holomorph.

   Hinweis:

   Sei $z_0 \in D \cap G$ und $\varepsilon > 0$ derart, dass $\overline{K_\varepsilon(z_0)} \subset D$. Zeigen Sie

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_\varepsilon(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

   für $z \in K_\varepsilon(z_0) \setminus G$ (Vorsicht: Sie können den Cauchy-Integralsatz nicht *direkt* anwenden, da Sie noch nicht wissen, dass f auf ganz $\overline{K_\varepsilon(z_0)}$ holomorph ist) und betrachten Sie den Grenzwert $z \to G$.

   Bemerkung:

   Hieraus und aus Blatt 5, 3b) folgt sofort das **Schwarz'sche Spiegelungsprinzip**: Ist D symmetrisch bzgl. der Spiegelung an $\mathbb{R}$ und f auf $D \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$ holomorph, auf $D \cap \{\operatorname{Im} z \geq 0\}$ stetig und auf $D \cap \mathbb{R}$ reell, so hat f eine holomorphe Fortsetzung auf ganz D, definiert durch $f(z) := \overline{f(\overline{z})}$ für $z \in D \cap \{\operatorname{Im} z < 0\}$. Ähnlich wie in Blatt 10, 4) lässt sich dies auch mittels Möbiustransformationen leicht auf den Fall verallgemeinern, dass D bzgl. eines verallgemeinerten Kreises K symmetrisch, f auf einer ‚Seite' von D (bzgl. K) definiert und holomorph und bei K stetig ist und die Werte von $f(z)$ für $z \in K$ auf einem Kreis K' liegen.

(6 Punkte)

4) Zeigen Sie:

   a) Ist $D \subset \mathbb{C}$ sternförmig (d.h. es gibt ein $p \in D$, so dass für alle $z \in D$ die Strecke von p nach z in D liegt), so ist D einfach zusammenhängend.

   b) Ist $D \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und f auf D holomorph mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in D$, so hat f eine Quadratwurzel auf D, d.h. es gibt eine auf D holomorphe Funktion g mit $g^2 = f$.

(je 3 Punkte)

5) (Extra) Zeigen Sie: Sei X ein metrischer Raum und seien $D, D' \subset X$ offene Mengen. Sind D, D' einfach zusammenhängend und ist $D \cap D'$ wegzusammenhängend, so ist $D \cup D'$ einfach zusammenhängend. Stimmt das auch, wenn $D \cap D'$ nicht wegzusammenhängend ist?

(3 Extra-Punkte)

Abgabe: Bis 6. Juli vor Vorlesungsbeginn im Postfach Ihres Tutors.

I) Welche der folgenden Gebiete sind wegzusammenhängend, welche einfach zusammenhängend? Begründen Sie Ihre Antwort. Sie dürfen die Aussagen in Aufgaben 4 und 5 verwenden.

a) $\mathbb{C} \setminus \{x + iy \ : \ x = 0, \ |y| \leq 1\} \setminus \{x + iy \ : \ x > 0, \ y = \sin \frac{1}{x}\}$

b) $\{1 < |z| < 2\}$

c) $\mathbb{C} \setminus \{x + iy : \ x \leq 0, \ y = 0\}$

d) $\mathbb{C} \setminus \{x + iy : \ y \leq 0, \ x \in \{0, 1\}\}$

e) $\{\operatorname{Re} z > 0, \ \operatorname{Im} z > 0, \} \setminus \{|z - (1 + i)| < \sqrt{2}\}$

f) Das Komplement einer logarithmischen Spirale um $0 : \mathbb{C} \setminus \{z : \ z = e^{t(1+i)}$ mit $t \in \mathbb{R}\} \setminus \{0\}$

g) $\{|z| < 1\} \setminus \{\frac{1}{n} : \ n = 1, 2, ...\} \setminus \{0\}$