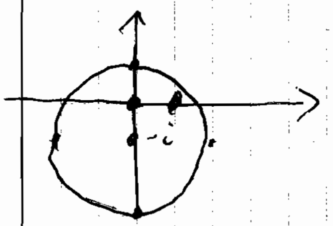
Lösungen Wiederholungsklausur Analysis IV

1) a) Wegen $\frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}$ ist

$$\int_{|z+i|=2} \frac{\sin z}{z(z+1)}\,dz = \int_{|z+i|=2} \frac{\sin z}{z}\,dz - \int_{|z+i|=2} \frac{\sin z}{z+1}\,dz$$



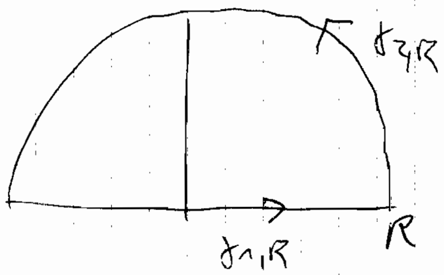
$$= 2\pi i \sin 0 - 2\pi i \sin(-1)$$

$$= -2\pi i \sin(-1) = 2\pi i \sin 1$$

nach der Cauchy-Integralformel, da beide Punkte 0 und -1 im Kreis $|z+i|<2$ liegen.

(da $|0+i| = 1 < 2$ und $|-1+i| = \sqrt{2} < 2$).

b)



Die Funktion $z \mapsto \frac{e^{iz}}{4+z^2} = f(z)$ ist meromorph, mit dem einzigen Pol $z = 2i$ (in der oberen Halbebene).

Das Residuum ist $\operatorname{Res}_{z=2i} \frac{e^{iz}}{(z+2i)(z-2i)} = \frac{e^{i\cdot(2i)}}{2i+2i} = -i\,\frac{e^{-2}}{4}$

Wegen $|e^{iz}| \le 1$ für $\operatorname{Im} z \geq 0$ ist für z auf $\gamma_{2,R}$

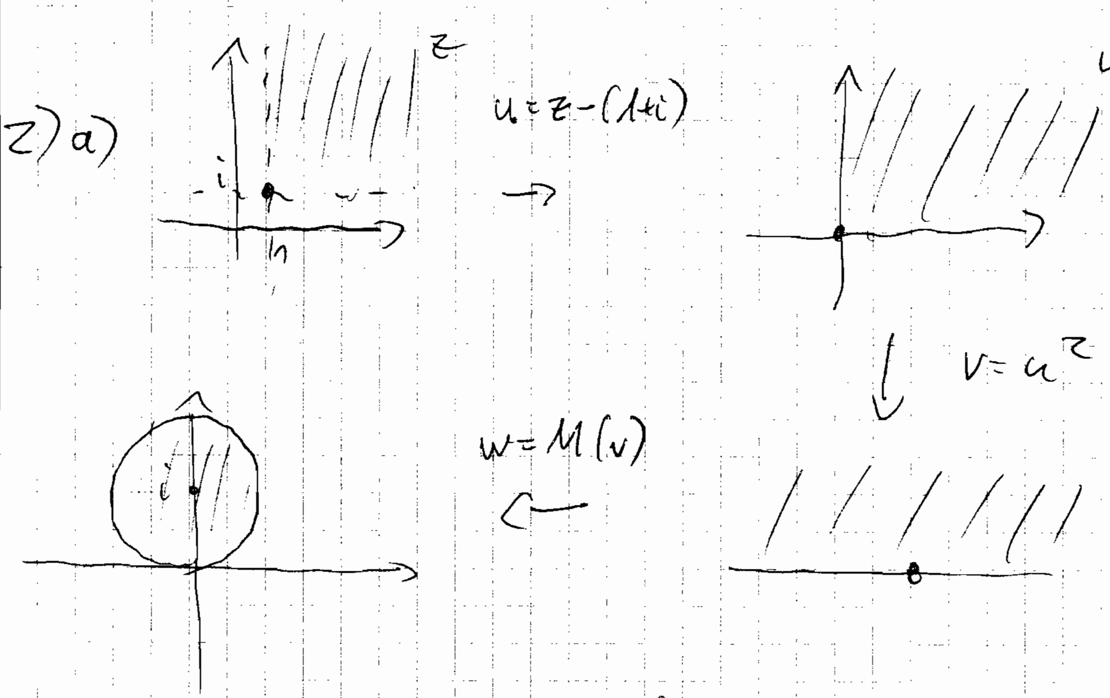
$$\left|\frac{e^{iz}}{4+z^2}\right| \le \frac{1}{|4+z^2|} \le \frac{1}{|z|^2-4} = \frac{1}{R^2-4},$$

also $\left|\int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,dz\right| \le L(\gamma_{2,R}) \cdot \frac{1}{R^2-4} = \pi R \cdot \frac{1}{R^2-4} \to 0$ für $R \to \infty$.

Also $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty} \left(-\int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,dz + 2\pi i \operatorname{Res}_{2i} f(z)\right)$

$$= \frac{\pi}{2} e^{-2}.$$

2) a)



Bestimme die Möbiustransformation M:

- M soll $0 \mapsto 0$ und $\infty \mapsto 2i$ (ein Punkt auf dem Kreis) abbilden, also
$$M^{-1}(w) = c \cdot \frac{w}{w-2i} \quad \text{für ein } c \in \mathbb{C}.$$

- Weiterhin soll M^{-1} die imaginäre Achse in sich abbilden (da diese senkrecht auf der reellen Achse und auf dem Kreis steht).
Mit $w = ia, a \in \mathbb{R}$, ist $\frac{w}{w-2i} = \frac{a}{a-2} \in \mathbb{R} \cup \infty$, also sollte man $c = \pm i$ wählen.

- Obere Halbebene $\mapsto$ Inneres des Kreises: $w = ia$ mit $a \in (0,2)$
$\overset{!}{\Rightarrow}$ $M^{-1}(w)$ hat positiven Imaginärteil
$$M^{-1}(w) = M^{-1}(ia) = \pm i \frac{a}{\underbrace{a-2}_{<0}} \Rightarrow \text{brauche } \underline{-i}.$$

Also $M^{-1}(w) = -i \frac{w}{w-2i} \Rightarrow M(v) = \frac{2v}{1-iv}$

$$\Rightarrow w = \frac{2v}{1-iv} = \frac{2u^2}{1-iu^2} = \frac{2\left(z-(1+i)\right)^2}{1-i\left(z-(1+i)\right)^2}.$$

2) b) f konform $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ $\Rightarrow$ f ist Möbiustransformation

$f(0)=0$, $f(\infty)=\infty \Rightarrow f(z)=c\cdot z$, $c\in\mathbb{C}$

(der Nenner in $f(z)=\dfrac{Az+B}{Cz+D}$ muss $C=0$ haben,

da sonst $z=-\dfrac{D}{C}$ nach ∞ abgebildet würde.

f soll bijektiv sein, und $\infty \mapsto \infty$ $\Rightarrow C=0$).

Dann $f(3i)=1+i \Rightarrow c\cdot 3i = 1+i$

$\Rightarrow c = \dfrac{1+i}{3i}$.

Also $f(z)=\dfrac{1+i}{3i}\, z$.

Die Antwort in b) ist eindeutig (wie schon gezeigt), in a) nicht (man kann sie durch $g\circ f$ ersetzen für eine beliebige konforme Selbstabbildung von $\{|w-i|<1\}$, zB g = Drehung um i).

3) Für $|z| = 1$ ist $|z^5| = 1$ und $|3z^3+1| \geq |3z^3| - 1 = 2$
> 1,

also hat $p(z) = z^5 + 3z^3 + 1$ auf $|z| = 1$ keine Nullstelle und nach Rouché in $|z| < 1$ genau so viele Nullstellen wie $3z^3 + 1$.

$3z^3+1$ hat die Nullstellen $z =$ die drei dritten Wurzeln aus $-\frac{1}{3}$.

Wegen $\frac{1}{3} < 1$ haben diese Wurzeln Betrag < 1, also hat $3z^3+1$ und damit p in $|z| < 1$ drei Nullstellen.

Für $|z| = 2$ ist $|z^5| = 32$ und $|3z^3+1| \leq |3z^3| + 1$
$= 25 < 32$,

also hat p in $|z| < 2$ genauso viele Nullstellen wie z^5, also 5 (mit Vielfachheit).

Daher hat p in $1 < |z| < 2$ genau $5 - 3 = 2$ Nullstellen.

4) a) Wahr. $f = \frac{1}{z} f_0$ mit f_0 holomorph bei 0

$g = z^k g_0$ mit g_0 holomorph bei 0, $k \geq 1$

$\Rightarrow f \cdot g = z^{k-1} f_0 g_0$, die rechte Seite definiert eine holomorphe Fortsetzung von fg nach Null

b) Falsch, zB $f(z) = z$, $g(z) = -z \Rightarrow (f+g)(z) = 0$
Nullstelle ∞ Ordnung (nicht einfach) bei 0.
oder: $f(z) = z$, $g(z) = -z + z^2 \Rightarrow (f+g)(z) = z^2$.

c) Wahr. Schreibe $f(z) = z^{-k} g(z)$ mit $g(0) =: a \neq 0$, $k \geq 1$.

Die Funktion $z \mapsto e^{\frac{1}{z^k}}$ hat in 0 eine wesentliche Singularität (Laurentreihe $1 + z^{-k} + \frac{1}{2!} z^{-2k} + \dots$ hat unendlich viele negative Potenzen).

Da g holomorph bei Null und $g(0) \neq 0$ ist, gibt es Konstanten $c > 0$, $C > 0$ mit

(*) $c \cdot |w| \leq |w^{g(z)}| \leq C |w|$

für alle $w \in \mathbb{C} \setminus 0$ und alle z in einer Umgebung von 0

Da $e^{\frac{1}{z^k}}$ eine wesentl. Sing. hat, ist es in jeder Umgebung von 0 unbeschränkt, aber $\lim_{z \to 0} |e^{\frac{1}{z^k}}| \neq \infty$.
Wegen (*) gilt dasselbe für $e^{\frac{1}{z^k} \cdot g(z)} = e^{f(z)}$,
also hat e^f eine wesentliche Singularität.