Prof. Dr. Daniel Grieser 15.11.2007

Zweites Übungsblatt zu Partiellen Differentialgleichungen

1) Bestimmen Sie die Charakteristiken der Gleichungen

   a) $u_y = xuu_x + 1$, $u(x,0) = x$

   b) $uu_x + u_y = 1$, $u(x,x) = \frac{1}{2}x$

   c) $u^2u_x + u_y = 0$, $u(x,0) = e^{-x/2}$.

(je 2 Punkte)

2) Ziel dieser Aufgabe ist es, das Phänomen sich schneidender Charakteristiken und den Definitionsbereich der Lösung am Beispiel der Gleichung in 1)c) genauer zu verstehen.

   Die (projizierten) Charakteristiken der Gleichung in 1)c) seien $x = x(x_0,t), y = y(x_0,t)$.

   a) Zeigen Sie, dass die Menge der Punkte, für die $\det[\partial(x,y)/\partial(x_0,t)] = 0$ gilt, genau durch $t = e^{x_0}$ bzw. durch $y = e^{x-1}$ beschrieben werden kann.

   b) Zeigen Sie, dass alle projizierten Charakteristiken tangential an die Kurve $y = e^{x-1}$ sind. Skizzieren Sie die projizierten Charakteristiken.

   c) Zeigen Sie, dass die Abbildung $(x_0,t) \mapsto (x,y)$ ein Diffeomorphismus zwischen den Mengen $\{(x_0,t) \in \mathbb{R}^2 : t < e^{x_0}\} \to M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < e^{x-1}\}$ ist, und folgern Sie, dass die Lösung der Gleichung in 1)c) in ganz M definiert ist.

(je 2 Punkte)

   Bemerkung: Versuchen Sie, sich die Fläche, die sich als Vereinigung der Charakteristiken ergibt, räumlich vorzustellen. (Freiwillig: Stellen Sie diese Fläche mit Hilfe eines Computers, z.B. mit Maple, Mathematica oder einem ähnlichen Programm dar.) Sie hat genau über allen Punkten der Kurve $y = e^{x-1}$ eine vertikale Tangente, also über dieser Kurve eine Art Umklappung.

3) Zeigen Sie: Sei $n \geq 2$ und N die Elementarlösung von Δ auf $\mathbb{R}^n$. Sei $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ und

$$u(x) = (N * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} N(x-y)f(y)\,dy \tag{1}$$

   Dann gilt

   a) Falls $n \geq 3$, dann ist u beschränkt.

   b) Falls $n = 2$, dann wächst u höchstens logarithmisch, d.h. es gibt ein $C > 0$ mit $|u(x)| \leq C \log|x|$ für alle x mit $|x| \geq 2$. (Wegen $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ ist u für $|x| \leq 2$ beschränkt.)

(je 3 Punkte)

4) Zeigen Sie, dass die Funktion u in (1) die Gleichung $\Delta u = f$ löst, wie folgt:

   Für $\epsilon > 0$ sei N_ϵ die Funktion auf $\mathbb{R}^n$, die man erhält, wenn man in der Definition von $N(x)$ den Ausdruck $|x|$ durch $\sqrt{|x|^2 + \epsilon^2}$ ersetzt.

   Zeigen Sie $\Delta N_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\psi(\epsilon^{-1}x)$, für eine radiale Funktion ψ. Geben Sie ψ an.

   Zeigen Sie, dass $\psi \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \psi = 1$.

   Folgern Sie $(\Delta N_\epsilon) * f \to f$ und zeigen Sie, dass daraus die Behauptung folgt.

(6 Punkte)

Abgabe: Bis 28.11. vor Vorlesungsbeginn im Postfach von Frau Harutyunyan.