V.3 Vektorfelder

Sei M Mannigfaltigkeit.

Def: Ein Vektorfeld auf M ist eine glatte Abbildung $X: M \to TM$

mit $X(p) \in T_pM \ \forall p \in M$.

Wir schreiben meist X_p statt $X(p)$.

$\mathfrak{X}(M) = \{$ Vektorfelder auf $M \}$.

Bem: In lokalen Koordinaten kann man X schreiben als

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p, \quad \text{kurz } X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \text{ auf } U$$

da $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\big|_p\right)$ für jedes $p \in M$ eine Basis von T_pM ist.

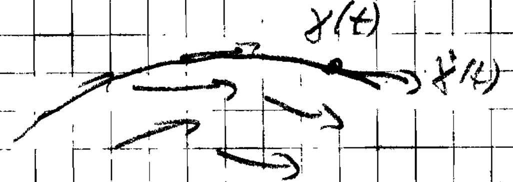
Die X^i sind Funktionen $U \to \mathbb{R}$ ($U \subset M$ die Koordinatenumgebung).

Glattheit von X ist äquivalent zur Glattheit der X^i (Übung).

Integralkurven, Fluss eines Vektorfeldes

Def.: $I \subset$ Intervall. Eine Kurve $\gamma : I \to M$ heißt Integralkurve von $X \in \mathfrak{X}(M)$, wenn gilt:

$$\dot\gamma(t) = X_{\gamma(t)} \qquad \forall t \in I.$$



Bem.: Eine Integralkurve für X zu bestimmen

$\Leftrightarrow$ ein System von n Differentialgleichungen 1. Ordnung lösen

Am einfachsten sieht man das in $\mathbb{R}^n$ (d.h. $M \subset \mathbb{R}^n$ offen)

$\gamma = (\gamma^1, \dots, \gamma^n)$, $X = (X^1, \dots, X^n)$, dann

$$\dot\gamma(t) = X_{\gamma(t)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \dot\gamma^1(t) = X^1(\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$$

$$\vdots$$

$$\dot\gamma^n(t) = X^n(\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$$

Gibt man $\gamma(t_0)$ für ein t_0, hat man ein Anfangswertproblem, das nach dem bekannten Satz eindeutig lösbar ist.

Satz: M Mgfk, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$

Dann gibt es eine eindeutige maximale Integralkurve

$$\gamma : I_{max} \to M \quad , \quad I_{max} \subset \mathbb{R} \text{ offen}$$

mit $\gamma(0) = p$.

Falls M kompakt ist, so ist $I_{max} = \mathbb{R}$, d.h. γ ist für alle Zeiten definiert.

Maximal heißt: Ist $\gamma_1 : I \to M$ eine Integralkurve mit $\gamma_1(0) = p$,
so folgt $I \subset I_{max}$
und $\gamma_1 = \gamma|_I$

(Beweis s. Vorlesung mittels Existenz- und Eindeutigkeitssatzes im $\mathbb{R}^n$)

Bsp: $M = \mathbb{R}$, $V(x) = x^2 \frac{\partial}{\partial x}$; die DGL lautet dann

$$\dot{x} = x^2$$

(statt $\gamma(t)$ schreibt man oft $x(t)$).

Lösung: $\frac{\dot{x}}{x^2} = 1 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{x}\right)^{\cdot} = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x} = C + t$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{C+t}$$

C ist durch die Anfangsbedingung $x(0) = p$ festgelegt, und man erhält

$$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{p} - t}$$ (falls $p \neq 0$, und $x(t) \equiv 0$ für $p = 0$)

<u>Beachte:</u> $x(t)$ ist nicht für alle t definiert

(Lösung $\to \infty$ in endlicher Zeit),

daher ist die Kompaktheit im Satz (letzter Teil)

wichtig.

<u>Zusätze zum Satz:</u>

1) (Glatte Abhängigkeit vom Anfangswert)
Zu jedem $p \in M$ sei γ_p die Integralkurve von X

mit $\gamma_p(0) = p$.
Dann ist $(p,t) \mapsto \gamma_p(t)$ glatt (wo immer dies definiert ist, z.B. als Abbildung $M \times \mathbb{R} \to M$, falls M kompakt)

(Dies folgt aus dem Standardsatz über die glatte Abhängigkeit von Lösungen von DGL vom Anfangswert.)

2) (Zeitabhängige Vektorfelder)

Sei $X(t)$ zeitabhängiges Vektorfeld, d.h.

- $X(t)$ ist Vektorfeld für jedes $t \in I \subset \mathbb{R}$

- $(t,p) \mapsto X(t)_p$ ist glatt.