Dann hat die Gleichung $\dot{\gamma}(t) = X(t)_{\gamma(t)}$

$$\gamma(0) = p \qquad (DGI)$$

eine eindeutige maximale Lösung und diese ist auf ganz I definiert, falls M kompakt ist.

(Beweis genauso wie vorher)

<u>Def</u>: Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ und für jedes $p \in M$ sei

$$\gamma_p : I_p \to M$$

die maximale Integralkurve mit $\gamma_p(0) = p$.

Dann heißt

$$\phi : (p,t) \mapsto \gamma_p(t)$$

der <u>Fluss</u> von X.

<u>Bem</u>: Der Definitionsbereich von ϕ ist $\{(p,t) \in M \times \mathbb{R} : t \in I_p\}$.

Aus den bereits zitierten Sätzen folgt auch, dass dies eine offene Teilmenge von $M \times \mathbb{R}$ ist.

Falls $I_p = \mathbb{R}$ $\forall p$ (z.B. wenn M kompakt ist), so ist

$$\phi : M \times \mathbb{R} \to M.$$

Man schreibt auch $\phi_t : M \to M$

<u>Bem</u>: Per Def. ist also $\boxed{\frac{d}{dt}\phi_t(p) = X_{\phi_t(p)}}$.

Der Einfachheit halber nehmen wir im Folgenden immer an, dass Flüsse auf ganz $M \times \mathbb{R}$ definiert sind.

__Satz__: Sei γ_p auf ganz $\mathbb{R}$ definiert $\forall p$.
Dann ist $\phi_t : M \to M$ ein Diffeomorphismus $\forall t$,

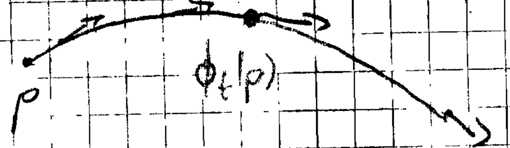
und es gilt

a) $\phi_0 = id_M$

b) $\phi_{s+t} = \phi_s \circ \phi_t \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$.

__Beweis__: a) $\phi_0(p) = \gamma_p(0) = p$

b)



$\phi_{s+t}(p) = \phi_s(\phi_t(p))$.

Idee: $\phi_{s+t}(p)$ = wohin man kommt, wenn man, von p anfangend, die Zeit $s+t$ lang entlang X läuft

$\phi_s(\phi_t(p))$ = ... erst die Zeit t, dann vom Ziel $\phi_t(p)$ aus die Zeit s

Also $\phi_{s+t}(p) = \phi_s(\phi_t(p))$

Formal: Sei t fest. Für $s \in \mathbb{R}$ sei

$\gamma(s) = \phi_{s+t}(p)$

$\tilde{\gamma}(s) = \phi_s(\phi_t(p))$

Dann gilt $\gamma(0) = \phi_t(p)$, $\dot\gamma(s) = \frac{d(s+t)}{ds} X_{\phi_{s+t}(p)} = X_{\gamma(s)}$

und $\tilde\gamma(0) = \phi_t(p)$, $\dot{\tilde\gamma}(s) = X_{\phi_s(\phi_t(p))} = X_{\tilde\gamma(s)}$

Also sind $\gamma, \tilde\gamma$ Integralkurven von X mit Anfangspunkt $\phi_t(p)$.

Wegen der Eindeutigkeit folgt $\gamma(s) = \tilde\gamma(s)$ $\forall s$. qed

Für $s = -t$ folgt schließlich $\phi_t \circ \phi_{-t} = id_M = \phi_{-t} \circ \phi_t$,

d.h. ϕ_{-t} ist Inverses zu ϕ_t.

Da ϕ_t und ϕ_{-t} glatt sind, ist ϕ_t ein Diffeomorphismus

$\boxtimes$

<u>Bem</u> $Diff(M) = \{\text{Diffeomorphismen } M \to M\}$ ist

eine Gruppe bzgl. Komposition. a), b) sagen, dass

die Abbildung
$$t \longmapsto \phi_t$$
$$\mathbb{R} \longrightarrow Diff(M)$$

ein Gruppenhomomorphismus $(\mathbb{R}, +) \to (Diff(M), \circ)$ ist

So einen Gruppenhomomorphismus nennt man auch

<u>1-Parametergruppe von Diffeomorphismen</u>

<u>Bem</u>: Rechnen in Koordinaten:

Ist, in Koordinaten, $X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, so

erhält man $\gamma : I \to M$ durch Lösen von

$$\dot\gamma^1(t) = X^1(\gamma(t))$$
$$\vdots$$
$$\dot\gamma^n(t) = X^n(\gamma(t))$$

wobei $\gamma^1, \dots, \gamma^n$ die Komponenten von γ in den Koordinaten x sind, d.h. $\gamma^i = x^i \circ \gamma$
oder $\gamma^i(t) = x^i(\gamma(t))$

(Erinnerung: $p \in M$ hat die Koordinaten $x^1(p), \dots, x^n(p)$.)

<u>Bsp</u>. $M = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, Koordinaten wie früher eingeführt
(d.h. $\varphi = \pi|_I$, $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ Projektion,
$I \subset \mathbb{R}$ Intervall)

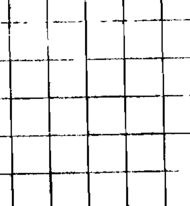
$X(x) = a(x)\frac{\partial}{\partial x}$

$\Rightarrow$ Fluss wird so bestimmt:

1) Löse $\dot x(t) = a(x(t))$, $x(0) = p$

2) Setze $\phi_t(p) = x(t)$ für dieses x

<u>Bsp</u>: $X(x) = \frac{\partial}{\partial x}$: $\dot x(t) = 1 \Rightarrow x(t) = p + t$



$\Rightarrow \phi_t(p) = p + t$

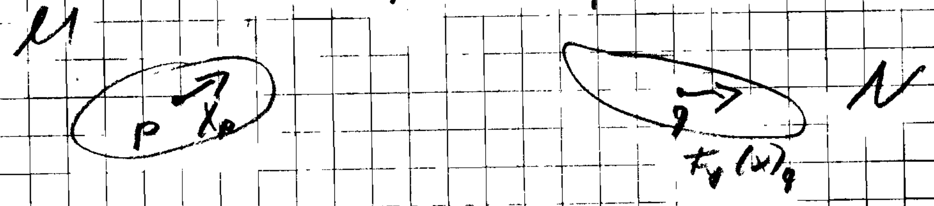
Interpretiert man $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ als Kreis mit Umfang 1, so ist das eine Drehung um t. zB $\phi_1 = \mathrm{id}$

Wir betrachten nun zwei wichtige Operationen auf Vektorfeldern:

- „push-forward" (Vorwärtsschieben)
- Lie-Klammer

Push-forward:

<u>Def.</u> $F: M \to N$ Diffeo, $X \in \mathfrak{X}(M)$.
Definiere $F_*(X) \in \mathfrak{X}(N)$
mittels $F_*(X)_q = dF_{|p}(X_p)$, falls $q = F(p)$.



Also: $$F_*(X)_q = dF_{|F^{-1}(q)}\left(X_{F^{-1}(q)}\right)$$

<u>Vorstellung:</u> X wird durch F von M nach N „rübergeschoben".

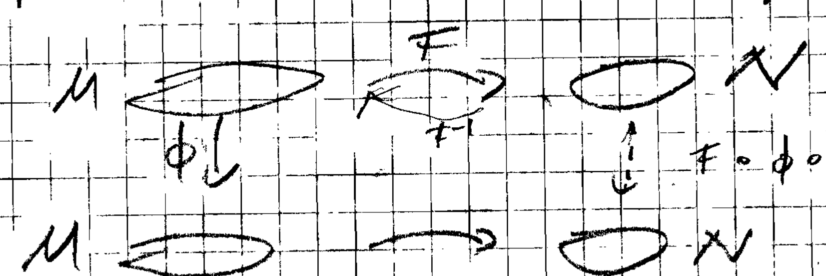
<u>Bem:</u> $F_*(X)$ ist, für Vektorfelder, die Antwort auf die Frage:

Gegeben ein Diffeo $F: M \to N$ und ein geometrisches Objekt auf M, wie bestimmt man das „entsprechende" geometrische Objekt auf N?

Diese Definition ist <u>natürlich</u>, denn wenn $X_p = [\gamma]$ (d.h. durch die Kurve γ repräsentiert), so ist $F_*(X)_q = [F \circ \gamma]$, d.h. durch die Bildkurve $F \circ \gamma$ repräsentiert. $(q = F(p))$.

Andere Beispiele hierfür:

geometrisches Objekt auf M		zugeordnetes Objekt auf N
Punkt	$p \in M$	$F(p)$
Kurve	$\gamma : I \to M$	$F \circ \gamma : I \to N$
Funktion	$f : M \to \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$	$f \circ F^{-1} : N \to \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$
Vektorfeld	$X \in \mathfrak{X}(M)$	$F_*(X) \in \mathfrak{X}(N)$
Abbildung	$\phi : M \to M$	$F \circ \phi \circ F^{-1} : N \to N$



Diese Zuordnungen sind so gemacht, dass die Beziehungen (*) der Objekte erhalten bleiben, z.B.:

a) $X_p = [\gamma] \Rightarrow F_*(X)_{F(p)} = [F \circ \gamma]$

b) $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ Fluß von X $\Rightarrow$ $(F \circ \phi_t \circ F^{-1})_{t \in \mathbb{R}}$ Fluß von $F_*(X)$

c) γ Integralkurve von X mit $\gamma(0) = p$ $\Rightarrow$ $F \circ \gamma$ Integralkurve von $F_*(X)$ mit $(F \circ \gamma)(0) = F(p)$.

(Wir werden noch mehr Objekte und Beziehungen kennenlernen, die entsprechenden Aussagen sind dann jeweils zu beweisen.)

(*) Gleichzeitig beantworten sie auch die Frage: Wie soll man's denn sonst machen??

Beweis von c): Übung. (Kettenregel!)

Beweis von b): Nach c) gilt:

$t \mapsto \gamma_p(t)$ Integralkurve von X mit $\gamma_p(0) = p$

$\Rightarrow$ $t \mapsto (F \circ \gamma_p)(t)$ Integralkurve von $F_*(X)$ mit $(F \circ \gamma_p)(0) = F(p)$

Nach Definition ist $\phi_t(p) = \gamma_p(t)$, und für den Fluss ψ von $F_*(X)$ $\psi_t(F(p)) = F(\gamma_p(t))$.

Also $\psi_t(F(p)) = F(\phi_t(p))$,

also mit $q = F(p)$: $\psi_t(q) = F(\phi_t(F^{-1}(q)))$ qed

Bem: • $F = id: M \to M$, dann $id_*(X) = X$

• $M \xrightarrow{F} N \xrightarrow{G} K$ (F, G Diffeos) $\Rightarrow$

$(G \circ F)_* = G_* \circ F_*$

(wieder Kettenregel)

Bevor wir die Lie-Klammer einführen können, zunächst als Erinnerung:

Ableiten einer Funktion nach einem Vektorfeld:

Def: $X \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$. Definiere $Xf \in C^\infty(M)$

durch $$(Xf)(p) = df_{|p}(X_p)$$

(d.h. die Ableitung von f in Richtung X_p)

In Koordinaten:

ZB $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$, dann $df_{|p}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}_{|p}\right) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$

Also $$\frac{\partial}{\partial x^i} f = \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad !$$

(Daher die Notation!)

Allgemein: $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Rightarrow Xf = \sum_i X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$.

Bem: Diese Operation verhält sich wieder natürlich bzgl. Diffeomorphismen. D.h.: Sei $F: M \to N$ Diffeo.

Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$ $\rightsquigarrow$ $F_*(X) \in \mathfrak{X}(N)$, $f \circ F^{-1} \in C^\infty(N)$

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow & & \downarrow \\ Xf \in C^\infty(M) & \rightsquigarrow (Xf)\circ F^{-1} & \overset{!}{=} & F_*(X)(f\circ F^{-1}) \end{array}$$

(Beweis als Übung)

Bem: Produktregel $X(fg) = (Xf)g + f\,Xg$

Die Lie-Klammer

Satz und Def: Seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.
Dann gibt es ein eindeutiges Vektorfeld, genannt $[X,Y]$, so dass für alle $f \in C^\infty(M)$ gilt:

$$X(Yf) - Y(Xf) = [X,Y]f$$

Kurz: $[X,Y] = XY - YX$ (zu verstehen als Operatoren $C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, mit $XY = X \circ Y$ etc.)

Dies sieht zunächst vielleicht seltsam aus, ist aber eine der wichtigsten Operationen der „höheren" Mathematik überhaupt!

Beweis (und gleichzeitig Berechnungsmethode in Koordinaten):

In Koordinaten sei $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$.

Dann ist

$$X(Yf) = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big(\sum_j Y^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\Big) = \sum_{i,j} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big(Y^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\Big)$$

$$= \sum_{i,j} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} + \sum_{i,j} X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$$ (Produktregel)

$$Y(Xf) = \ldots = \sum_{i,j} Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i} + \sum_{i,j} Y^j X^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}$$

Wegen $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}$ sind die beiden letzten Summanden gleich!

$$\Rightarrow X(Yf) - Y(Xf) = \sum_{i,j} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} - \sum_{i,j} Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

$$= \sum_i \underbrace{\Big(\sum_j \big(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \big) \Big)}_{=: Z^i} \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

$$= \sum_i Z^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

Also:

$$[X,Y] = \sum Z^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

mit $$Z^i = \sum_j X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}$$ □

Bem: Im $\mathbb{R}^n$, wo Vektorfelder als Abbildungen $X: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ aufgefasst werden können, sagt diese Formel

$$[X,Y] = dY(X) - dX(Y)$$

hier wird Y abgeleitet (kommt von $X(Yf)$)

hier wird X abgeleitet (von $Y(Xf)$)

Bem:
Der Punkt war: $f \mapsto X(Yf)$ und $f \mapsto Y(Xf)$ sind beides Differentialoperatoren 2. Ordnung (f wird 2mal abgeleitet).

Der Teil mit 2. Ableitungen von f ist bei beiden gleich, also ist $f \mapsto X(Yf) - Y(Xf)$ ein Diff. Op. 1. Ordnung, also durch ein Vektorfeld gegeben.

Bem.: $D: C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ Diff. Op. 1. Ordnung, der auf Konstanten verschwindet, d.h. $D(c) = 0 \ \forall c \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow \exists$ Vektorfeld X mit $D(f) = Xf \ \forall f$.

Einfach in lokalen Koordinaten nachrechnen!
(Denn „Diff. Op. 1. Ordnung" bedeutet, dass D in lokalen Koord. gerade das ist!)

Algebraische Eigenschaften der Lie-Klammer

1) $[X, Y] = -[Y, X]$ (Antisymmetrie)

2) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$
$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ (Jacobi-Identität)
(Nachrechnen!)

Offenbar ist $X, Y \mapsto [X, Y]$ $\mathbb{R}$-bilinear.

Def.: Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum V (mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) zusammen mit einer bilinearen Abbildung

$$[\ ,\ ] : V \times V \to V$$
$$(X, Y) \mapsto [X, Y],$$

die 1), 2) (s. oben) erfüllt, heißt <u>Lie-Algebra</u>

Also: $(\mathfrak{X}(M), [\ ,\ ])$ ist Lie-Algebra.

Bem.: Die Operation $X, Y \mapsto [X, Y]$ ist <u>nicht assoziativ</u>.
D.h. es gilt im Allg.

$$[X, [Y, Z]] \neq [[X, Y], Z]$$

Die Jacobi-Identität ist eine Art Ersatz für das Assoziativgesetz.

Bem: Ein Ihnen bekanntes Beispiel einer Lie-Algebra ist $(\mathbb{R}^3, \times)$, wobei $\times$ das Kreuzprodukt ist. (Übung.)

Bem: Man kann Skalare, aber nicht Funktionen aus $[\ ]$ herausziehen:

$$[X, cY] = c[X,Y] \quad , c \in \mathbb{R}$$

$$[X, gY] = g[X,Y] + (Xg)\cdot Y \quad , g \in C^\infty(M).$$

(ähnlich für $[gX, Y]$)

(Denn $[X,gY]f = X(g\cdot Yf) - g\cdot Y(Xf)$
$= Xg\cdot Yf + g\cdot X(Yf) - g\cdot Y(Xf)$
$= (Xg\cdot Y)f + g\cdot[X,Y]f$)

Grund: g wird in $[X,gY]$ durch X abgeleitet.

Bsp: In $\mathbb{R}^2$: $X = \frac{\partial}{\partial x}$, $Y = x\frac{\partial}{\partial y}$

$$\Rightarrow XY = \frac{\partial}{\partial x} x \frac{\partial}{\partial y} = x\cdot\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + 1\cdot\frac{\partial}{\partial y}$$

$$YX = x\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} = x\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}$$

$$\Rightarrow [X,Y] = \frac{\partial}{\partial y}$$

Bsp: $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x^j} \Rightarrow [X,Y] = 0$
in lokalen Koord. auf M