Um die <u>geometrische Bedeutung</u> der Lie-Klammer zu verstehen, betrachten wir die Flüsse der Vektorfelder X, Y.

Zunächst nur mit dem Fluss von X:

<u>Satz</u>: Seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, ϕ der Fluss von X.

Dann gilt

$$[X, Y] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\phi_{-t})_* Y$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{(\phi_{-t})_* Y - Y}{t}$$

(Bild nächste Seite)

(d.h. $[X, Y]$ = Änderungsgeschwindigkeit von Y unter dem Fluss von X)

<u>Bem</u>: Die rechte Seite nennt man <u>Lie-Ableitung</u> $L_X Y$ von Y nach X.

<u>Beweis</u>: Wir rechnen das zunächst im $\mathbb{R}^n$ nach.

Am übersichtlichsten geht das, wenn man alle Funktionen von t um $t=0$ Taylor-entwickelt (zu 1. Ordnung)

Zum Beispiel

$$\phi_t(p) = \phi_0(p) + t \cdot \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \phi_t(p)\right) + O(t^2)$$

$$= p + t \cdot X_p + O(t^2)$$

(wobei $O(t^2) := t^2 \cdot$ eine glatte, vektorwertige Funktion von t, p)

Wie rechnet man mit diesen Entwicklungen?

ZB ist für glatte Funktionen f:

$$f(p + t X_p + O(t^2)) = f(p) + t \, df_p(X_p) + O(t^2)$$

denn der t-Koeffizient muss

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(p+tX_p+O(t^2)) = df_{|p}(X_p)$$

sein, da $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(p+tX_p+O(t^2)) = X_p$.

Statt f geht das genauso mit dem vektorwertigen Y, also

$$Y_{\phi_t(p)} = Y_{p+tX_p+O(t^2)}$$
$$= Y_p + t\,dY_{|p}(X_p) + O(t^2)$$

(Ziel: Berechne $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left((\phi_{-t})_* Y\right)_p$.

Es ist $\left((\phi_{-t})_* Y\right)_p = d\phi_{-t}{}_{|\phi_t(p)}\left(Y_{\phi_t(p)}\right)$)

Weiterhin ist wegen $\phi_t(p) = p + tX_p + O(t^2)$

$$\phi_t = id + tX + O(t^2)$$

also $\quad \phi_{-t} = id - tX + O(t^2)$

und daher $\quad d\phi_{-t}{}_{|q} = id - t\,dX_{|q} + O(t^2)$

(beachte: da $O(t^2) \cdot t^2$ glatt, ist $d\,O(t^2)$ wieder $O(t^2)$, denn d leitet dieses nicht nach t ab)

und $\quad d\phi_{-t}{}_{|\phi_t(p)} = id - t\,dX_{|p} + O(t^2)$ ← nicht $\phi_t(p)$!

(denn der Extra-Term ist von der Ordnung t^2)

und damit schließlich

$$d\phi_{-t}|_{\phi_t(p)}(Y_{\phi_t(p)}) = \left(id - t\,dX_p + O(t^2)\right)\left(Y_p + t\,dY_p(X_p) + O(t^2)\right)$$

$$= Y_p + t\,dY_p(X_p) - t\,dX_p(Y_p) + O(t^2).$$

Also $\frac{d}{dt}\big|_{t=0}$ (linke Seite) $= dY_p(X_p) - dX_p(Y_p)$

$= [X,Y]_p$.

Also gilt der Satz im $\mathbb{R}^n$.

Zur Übertragung auf eine Mgfk. M muss man nur noch nachprüfen, dass sich $[\ ]$ unter Diffeos (hier: der Koordinatenabbildung) natürlich verhält, also:

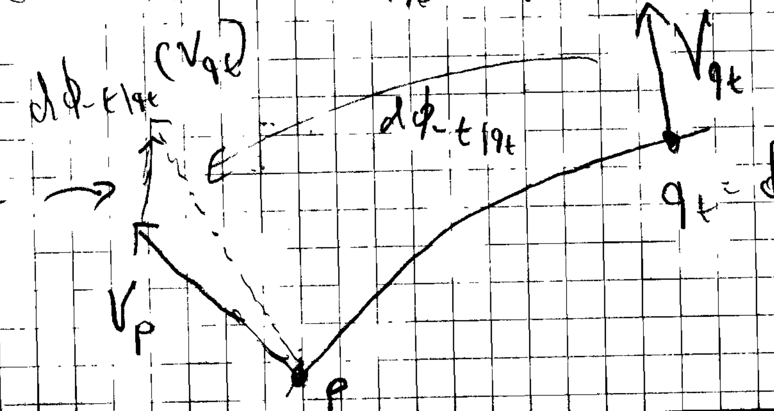
<u>Lemma</u>: $F: M \to N$ Diffeo, $X, Y \in \mathfrak{X}(M) \Rightarrow$

$$[F_*(X), F_*(Y)] = F_*([X,Y])$$

(Beweis einfach, z.B. mittels der Natürlichkeit von $X, f \mapsto Xf$, s. Seite 171 unten)

Bild: $((\phi_{-t})_* Y)_p = d\phi_{-t}|_{q_t}(Y_{q_t})$, $q_t = \phi_t(p)$

Lie-Klammer = diese Differenz geteilt durch t, für $t \to 0$.



Noch geometrischer lässt sich $[X,Y]$ mittels beider Flüsse verstehen:

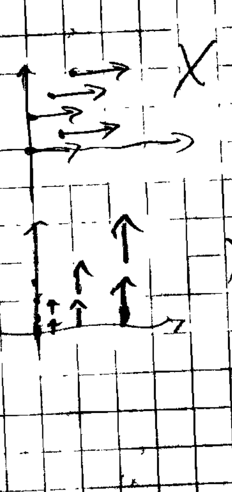
<u>Satz</u>: Seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, ϕ der Fluss von X
ψ der Fluss von Y

Dann gilt:

$$[X,Y] \equiv 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \phi_s \circ \psi_t = \psi_t \circ \phi_s \quad \forall s,t \in \mathbb{R}.$$

<u>Bsp</u>: $M = \mathbb{R}^2$, $X = \frac{\partial}{\partial x}$, $Y = x\frac{\partial}{\partial y}$



$$\phi_s(x,y) = (x+s, y)$$
$$\psi_t(x,y) = (x, y+tx)$$

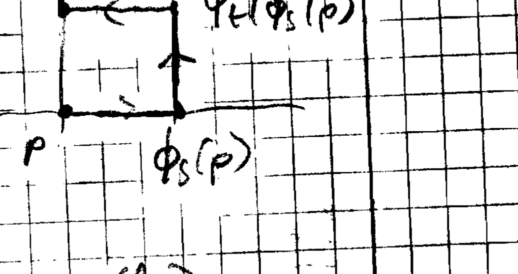
Dann z.B.

$$\phi_s(0,0) = (s,0)$$
$$\psi_t(\phi_s(0,0)) = (s, ts)$$

und

$$\psi_t(0,0) = (0,0)$$
$$\phi_s(\psi_t(0,0)) = (s,0)$$

ungleich!



Anders gesagt: $(\psi_{-t}\phi_{-s}\psi_t\phi_s)(p) \neq p$, $p = (0,0)$.

In Worten: $[X,Y] \equiv 0 \Leftrightarrow$ die Flüsse von X, Y kommutieren.

Zum Beweis brauchen wir ein

Lemma: $F: M \to M$ Diffeo, $X \in \mathfrak{X}(M)$. Dann

$$F_*(X) = X \iff F \circ \phi_t = \phi_t \circ F \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Beweis: Nach b), Seite 169, hat

$F_*(X)$ den Fluss $F \circ \phi_t \circ F^{-1}$.

Ist also $F_*(X) = X$, so folgt $F \circ \phi_t \circ F^{-1} = \phi_t$.

Umgekehrt bestimmt der Fluss das Vektorfeld, also gilt auch die andere Richtung. □

Beweis des Satzes:

Sei $p \in M$ und betrachte die Kurve

$$c(t) = ((\phi_{-t})_* Y)_p, \quad c: I \to T_p M.$$

Es gilt

$$\dot{c}(t) = \frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} c(t+\tau) = \frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} ((\phi_{-t-\tau})_* Y)_p$$

$$= \frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} ((\phi_{-t})_* (\phi_{-\tau})_* Y)_p$$

$$= \frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} d\phi_{-t}\big|_{\phi_t(p)} \left(((\phi_{-\tau})_* Y)_{\phi_t(p)} \right)$$

$$= d\phi_{-t}\big|_{\phi_t(p)} \left(\frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} ((\phi_{-\tau})_* Y)_{\phi_t(p)} \right)$$

(Satz S. 176) $$= d\phi_{-t}\big|_{\phi_t(p)} \left([X, Y]_{\phi_t(p)} \right) = ((\phi_{-t})_* [X, Y])_p$$

Also $[X,Y]=0 \Rightarrow c$ ist konstant

$\Rightarrow c(t) = c(0) \;\forall t$

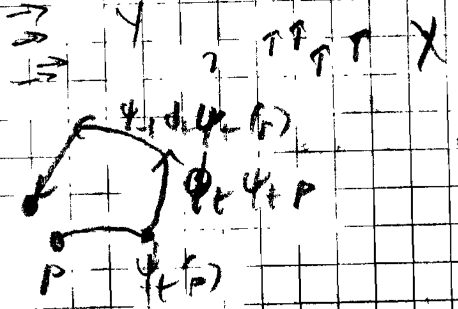
$\Rightarrow (\phi_{-t})_* Y = Y \;\forall t$

$\overset{\text{Lemma}}{\Rightarrow} \phi_{-t} \circ \psi_s = \psi_s \circ \phi_{-t} \;\forall s \;\forall t$ ■

Bem: Auch für $[X,Y] \neq 0$ kann man $[\;]$ mit Hilfe des Nicht-kommutierens der Flüsse ausdrücken: Es gilt

$$[X,Y]_p = \lim_{t\to 0} \frac{\phi_{-t}\psi_{-t}\phi_t\psi_t(p) - p}{t^2}$$

d.h. etwa:



dann $q_t = \phi_{-t}\psi_{-t}\phi_t\psi_t p$

dann ist $q_t = p + t^2[X,Y]_p + O(t^3)$

<u>Frage</u>: Gegeben Vektorfelder $X_1, \dots, X_n$, linear unabhängig bei p.
Gibt es Koordinaten nahe p, so dass
$$X_k = \frac{\partial}{\partial x^k} \quad \text{für alle } k = 1, \dots, n \text{ ?}$$
(nahe p)

<u>Antwort</u>: Nicht immer!
Man kann aber angeben, wann ja:

<u>Satz</u>: Seien Vektorfelder $X_1, \dots, X_n$ nahe $p \in M$ gegeben und bei p linear unabhängig (d.h. $X_{1p}, \dots, X_{np}$ sind Basis von T_pM).
Dann sind äquivalent:

a) Es gibt Koordinaten $x = (x^1, \dots, x^n)$ nahe p mit
$$X_k = \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad k = 1, \dots, n, \quad \text{nahe } p.$$

b) Es gilt $[X_k, X_l] = 0$ $\forall k, l$ nahe p.

<u>Beweis</u>: "$\Rightarrow$" ist klar nach der Formel in Koordinaten für $[\ ]$, da in $\left[\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right]$ nur <u>Ableitungen</u> der Koeffizienten (die hier konstant 1 bzw. 0 sind), vorkommen!

"$\Leftarrow$": Sei ϕ^k der Fluss von X_k. Nach dem Satz Seite 179 vertauschen alle ϕ^k_t nahe p für t nahe 0

Für $t_1, \dots, t_n$ nahe 0 definiere

$$\varphi(t_1, \dots, t_n) = (\phi^1_{t_1} \circ \phi^2_{t_2} \circ \dots \circ \phi^n_{t_n})(p)$$

Dann gilt $\quad \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t) = X^1_{\varphi(t)} \qquad t = (t_1, \dots, t_n)$

Da die ϕ^k vertauschen, gilt auch

$$\varphi(t_1, \dots, t_n) = \phi^k_{t_k} \circ \phi^1_{t_1} \circ \dots (p)$$

und damit $\quad \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}(t) = X^k_{\varphi(t)}$

Daher sind $\quad \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(0), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_n}(0)$ linear unabhängig (nach Voraussetzung),

also ist φ ein Diffeo $\quad \hat{U} \to U$
für eine Umgebung $\hat{U}$ von 0 in $\mathbb{R}^n$
und - - - - - - U von p in M

(Satz über die Umkehrabbildung)

und außerdem ist in diesem Koordsystem gerade

$$X^k = \frac{\partial}{\partial t_k}$$

$$\left(\text{da } \frac{\partial}{\partial t_k} = \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}\right)$$