V.4 1-Formen und Tensoren

Wir werfen nun einen systematischen Blick auf gewisse Objekte, die uns schon oft begegnet sind.

1-Formen

Erinnerung: Für $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ist für jedes $p \in M$

$df|_p$ eine lineare Abbildung $T_pM \to \mathbb{R}$.

Dies ist ein Beispiel einer 1-Form.

Wir fixieren zunächst p und schreiben V statt T_pM.

Etwas lineare Algebra: Dualraum

V sei ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension n.

Def: Eine Linearform auf V ist eine lineare Abbildung $V \to \mathbb{R}$.
Der Dualraum von V ist der Vektorraum

$$V^* = \{\text{Linearformen auf } V\}$$

Offenbar ist V^* ein Vektorraum, z.B. ist Addition „punktweise" definiert:

$\alpha, \beta \in V^*$, dann $\alpha + \beta \in V^*$ definiert durch

$$(\alpha+\beta)(v) := \alpha(v) + \beta(v) \qquad \forall v \in V.$$

Für die späteren Rechnungen in Koordinaten brauchen wir den Begriff der dualen Basis

Satz und Def:

Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von V.
Definiere $e^i \in V^*$ für $i = 1, \dots, n$ durch

(*) $e^i(v) =$ Koeffizient von e_i in der Darstellung von $v \in V$ in der Basis $e_1, \dots, e_n$

Dann ist $\{e^1, \dots, e^n\}$ eine Basis von V^*, die sogenannte: duale Basis zu $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Bem: (*) sagt
$$e^i\left(\sum_{j=1}^n a^j e_j\right) = a^i \qquad (a^1, \dots, a^n \in \mathbb{R})$$

Offenbar ist dies wirklich eine Linearform V
Es gilt
$$e^i(e_j) = \begin{cases} 1, & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(Bezeichnung: $e^i(e_j) = \delta^i_j$)

Dies definiert e^i schon eindeutig, da lineare Abbildungen bereits durch ihre Werte auf einer Basis (hier $e_1, \dots, e_n$) festgelegt sind.

Zusatz zum Satz: Die Darstellung von $\alpha \in V^*$ in der Basis $\{e^1, \dots, e^n\}$ ist
$$\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^i$$

mit $\alpha_i = \alpha(e_i)$

<u>Beweis</u>: Wir zeigen zunächst die Formel. Sie zeigt, dass $\{e^1, .., e^n\}$ ein Erzeugendensystem von V^* ist.

Hierzu sei $v \in V$ beliebig, $v = \sum_i a^i e_i$, also $e^i(v) = a^i$.

Dann

$$\alpha(v) = \alpha\left(\sum a^i e_i\right) = \sum_i a^i \alpha(e_i)$$

Wegen $a^i = e^i(v)$ und $\alpha(e_i) = \alpha_i$ folgt

$$\alpha(v) = \sum_i \alpha_i e^i(v)$$

Da dies $\forall v$ gilt, folgt $\alpha = \sum_i \alpha_i e^i$.

Lineare Unabhängigkeit von $e^1, .., e^n$:

Sei $\sum \alpha_i e^i = 0$. Setze e_{i_0} ein, dann folgt $\alpha_{i_0} = 0$.
Also $\alpha_1 = .. = \alpha_n = 0$.

qed.

Sei nun M eine Mannigfaltigkeit.

Eine 1-Form auf M ist eine „Linearform an jedem Punkt",
genauer:

<u>Def</u>: Eine 1-Form α auf M ist eine Zuordnung $p \mapsto \alpha_p$ die jedem $p \in M$ ein $\alpha_p \in T_p^* M$ zuordnet, so dass α_p glatt von p abhängt.

Hierbei ist $T_p^* M := (T_p M)^*$ „Kotangentialraum".

Was „glatt von p abhängt" bedeutet, sehen wir gleich.

<u>Beispiel</u>: $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, dann ist df eine 1-Form auf M.

(Aber: nicht jede 1-Form kann so geschrieben werden)

<u>1-Formen in Koordinaten</u>

Sei $x: U^{\subset M} \to \mathbb{R}^n$ ein Koordinatensystem, $p \in U$.
Dies definiert die Basis $\frac{\partial}{\partial x^1}\big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\big|_p$ von T_pM.
Was ist die duale Basis?

<u>Lemma</u>:
Die zu $\frac{\partial}{\partial x^1}\big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\big|_p$ duale Basis von T_p^*M

ist $dx^1|_p, \dots, dx^n|_p$.

Hierbei sind $x^i: U \to \mathbb{R}$ die Koordinatenfunktionen, also ist $dx^i|_p: T_pM \to \mathbb{R}$ linear, also $dx^i|_p \in T_p^*M$.

Damit ist zumindest die Aussage sinnvoll.

<u>Beweis</u>: $dx^i|_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\big|_p\right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j}(p) = \delta^i_j$ qed.

Damit lässt sich jede 1-Form schreiben als

$$\alpha_p = \sum_{i=1}^n \alpha_i(p)\, dx^i|_p \quad , \alpha_i(p) = \alpha_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p\right)$$

wobei $\alpha_i: U \to \mathbb{R}$ Funktionen sind.

α heißt <u>glatt</u>, falls die α_i glatte Funktionen sind.

<u>Bsp</u>: $\alpha = df$ für $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Wegen $\quad df_{|p}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}_{|p}\right) = \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad$ ist

$$\boxed{df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}\, dx^i}$$

<u>Koordinatentransformation für 1-Formen und Vektorfelder</u>

Genau genommen ist die „Definition" von Glattheit nicht korrekt, da sie von der Wahl der Koordinaten abhängt.
Daher (und aus vielen anderen Gründen) ist es nützlich, sich zu überlegen, wie sich 1-Formen unter Koordinatenwechseln „transformieren".
Genauer:

Seien $x: U_1 \to \mathbb{R}^n$, $y: U_2 \to \mathbb{R}^n$ zwei Koordinatensysteme mit $U = U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Sei α eine 1-Form auf M.

Auf U_1 schreibe $\quad \alpha = \sum_i \alpha_i\, dx^i$

auf U_2 $\quad \alpha = \sum_j \beta_j\, dy^j$

<u>Frage</u>: Wie berechnet man die α_i aus den β_j (auf U) oder umgekehrt?