Antwort: Die $y^j$ sind Funktionen auf $U$.

Man kann sie also als Funktionen von $x^1, \dots, x^n$ auffassen. Wir schreiben diese als

$$y^j = y^j(x^1, \dots, x^n)$$

(Diese Schreibweise ist zwar etwas zweideutig, da das Symbol $y^j$ in zwei Bedeutungen vorkommt – als Funktion auf $U$ und als Funktion auf $x(U) \subset \mathbb{R}^n$, aber sie ist sehr nützlich!)

Durch Anwenden der Formel für $df$ (vorige Seite) auf $f = y^j$ erhalten wir

$$dy^j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} dx^i$$

Also $$\sum_j \beta_j \, dy^j = \sum_{j,i} \beta_j \frac{\partial y^j}{\partial x^i} dx^i$$

$$= \sum_i \Big( \sum_j \beta_j \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \Big) dx^i$$

Da dies gleich $\sum \alpha_i \, dx^i$ ist und $dx^1, \dots, dx^n$ eine Basis ist, folgt:

<u>Lemma</u> (Transformationsregel für [die Koeffizienten von] 1-Formen)

Falls $\sum \alpha_i dx^i = \sum \beta_j dy^j$, so

(*) $$\alpha_i = \sum_j \beta_j \frac{\partial y^j}{\partial x^i}$$

Wiederum sollte man sich eher die Herleitung als die Formel merken.

Man vergleiche dies mit:

<u>Lemma</u> (Transformationsformel für [die Koeffizienten von] Vektorfeldern)

Falls $\sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum b^j \frac{\partial}{\partial y^j}$, so

(**) $$b^j = \sum_i a^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}$$

<u>Beweis</u>: Zunächst gilt $\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_j \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}$

(Denn: Ist $v \in T_pM$ beliebig, $v = \sum v^j \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_p$,

so erhält man durch Anwenden von $dy^k$:

$dy^k(v) = v^k$

Also $v^j = dy^j(v)$. Man wende dies mit $v = \frac{\partial}{\partial x^i}$ an und verwende $dy^j\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}$ )

Also $\sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i,j} a^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}$

$$= \sum_j \Big( \sum_i a^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \Big) \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

Mit Koeffizientenvergleich folgt wieder die Behauptung. $\boxed{}$

<u>Bemerkung</u>: Durch Vertauschen der Rollen von $x, y$ (oder mittels des Satzes über die Umkehrabbildung) kann man $(*)$ umschreiben in:

$$(*') \qquad \beta_j = \sum_i \alpha_i \frac{\partial x^i}{\partial y^j}$$

(wobei jetzt natürlich jedes $x^i$ als Funktion $x^i(y^1, \dots, y^n)$ aufgefasst wird)

Vergleiche mit $(**)$:

$$b^j = \sum_i a^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}$$

Das ist ähnlich zu $(*')$, aber doch verschieden!

Man nennt $(*')$ die <u>kovariante</u>

und $(**)$ die <u>kontravariante</u>

Transformationsregel. (Hat wenig mit „kovarianter Ableitung" zu tun! Leider...)

Bemerkung:

(*) sagt aus, wie sich die Koeffizienten $(\alpha_i)$ einer 1-Form in einem Koord.system $(x)$ in die Koeff $(\beta_i)$ in einem anderen Koord.system $(y)$ transformieren.

Analog (**) für Vektorfelder

In einem Großteil der physikalischen Literatur und in (vor allem) der älteren mathematischen Literatur sagt man: (ich lasse mal das Argument $p \in M$ weg)

Ein Tangentialvektor an $M$ in $p$ ist dadurch gegeben, dass man zu jedem Koord.system $x = (x^1, \dots, x^n)$ einen Vektor $(a^1, \dots, a^n)$ reeller Zahlen angibt, derart, dass bei Übergang zu einem anderen Koord.system $y = (y^1, \dots, y^n)$ sich der Vektor in $(b^1, \dots, b^n)$, bestimmt durch (**), transformiert.

Analog für 1-Formen mit (*).

Man schreibt also nie $\sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, sondern einfach $(a^i)$ (oder $a^i$).

Vorteil: kürzere Notation.

Nachteil: Man muss die Transformationsformeln auswendig wissen.

(Bei der Notation $\sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ergeben sie sich fast automatisch, s. oben)

Entsprechend spricht man in der Physik von

- kovarianter Vektor (statt 1-Form)
- kontravarianter Vektor (statt Vektorfeld)

(wobei jeweils statt Vektor auch Tensor gesagt wird; es gibt aber auch allgemeinere Tensoren, s. unten)