Tensoren

Im Laufe der Vorlesung sind uns verschiedene Vorzeichen begegnet, die jedem $p \in M$ ein „Objekt bei p" zuordnen:

Vektorfeld: $X_p \in T_pM$

Differential einer Funktion $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$: $df|_p : T_pM \to \mathbb{R}$

1. Fundamentalform: $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ bilinear

Weingartenabbildung $W_p : T_pM \to T_pM$ linear

Wir wollen diese Art von Objekten systematisch betrachten. Sie heißen „Tensoren".
Zunächst halten wir p fest und schreiben V statt T_pM

Etwas (multi-) lineare Algebra:

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, W ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Def: Eine Abbildung $A: V^s = V \times \ldots \times V \to W$ heißt $\mathbb{R}$-multilinear, falls sie linear in jedem Argument separat ist, d.h.

$$A(v_1 + v_1', v_2, \ldots, v_s) = A(v_1, v_2, \ldots, v_s) + A(v_1', v_2, \ldots, v_s)$$
$$A(av_1, v_2, \ldots, v_s) = a \cdot A(v_1, v_2, \ldots, v_s)$$

$v_1, \ldots, v_s, v_1' \in V$, $a \in \mathbb{R}$

und analog an der i. statt der 1. Stelle, $i = 1, \ldots, s$.

Wir werden nur $W = \mathbb{R}$ und $W = V$ betrachten.
($\hat{A}$ = „Multilinearform")

Eine lineare Abbildg $V \to \mathbb{R}$ heißt auch Linearform [illegible])

Sind α, β Linearformen so definiere
die Bilinearform $\alpha \otimes \beta : V \times V \to \mathbb{R}$ durch:

$$(\alpha \otimes \beta)(v, w) := \alpha(v) \cdot \beta(w)$$

(sprich: α tensor β) (Tensorprodukt von α, β)

Offenbar ist $\alpha \otimes \beta$ wirklich bilinear.
Allgemeiner für Linearformen $\alpha_1, \dots, \alpha_s$:

$$(\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_s)(v_1, \dots, v_s) := \alpha_1(v_1) \cdot \dots \cdot \alpha_s(v_s)$$
$$(v_1, \dots, v_s \in V)$$

definiert Multilinearform
$$\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_s : V^s \to \mathbb{R}$$

Auf diese Weise erhält man nicht alle Multilinearformen, aber zumindest eine Basis.

Zunächst ist die Menge

$$(V^*)^{\otimes s} = \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{s \text{ Faktoren}} := \{ \text{Multilinearformen } V^s \to \mathbb{R} \}$$

offenbar ein Vektorraum.

Darstellung von Multilinearformen bzgl. einer

Sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis von V und $\{e^1, \ldots, e^n\}$ die duale Basis von V^*.

<u>Proposition</u> $\{e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_s} : i_1, \ldots, i_s \in \{1, \ldots, n\}\}$ ist eine Basis von $(V^*)^{\otimes s}$

Für eine Multilinearf. A ist

$$A = \sum_{i_1, \ldots, i_s} A_{i_1 \ldots i_s} \, e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_s}$$

mit $A_{i_1 \ldots i_s} = A(e_{i_1}, \ldots, e_{i_s})$

<u>Beweis</u> (Für $s = 2$ der Einfachheit halber)

Seien $v, w \in V$, $v = \sum a^i e_i$, $w = \sum b^j e_j$

also $a^i = e^i(v)$, $b^j = e^j(w)$

Dann

$$A(v,w) = A\left(\sum_i a^i e_i, \sum_j b^j e_j\right)$$

$$\overset{A \text{ bilinear}}{=} \sum_{i,j} a^i b^j A(e_i, e_j)$$

Nun ist $a^i b^j = e^i(v) e^j(w) = (e^i \otimes e^j)(v,w)$

und $A(e_i, e_j) = A_{ij}$, also

$$A(v,w) = \sum_{i,j} A_{ij} (e^i \otimes e^j)(v,w)$$

$= g_{ij}$ für alle v, w, d.h.

$$A = \sum_{i,j} A_{ij}\, e^i \otimes e^j.$$

Dies zeigt, dass $\{e^i \otimes e^j : i,j = 1, \dots, n\}$

ein Erzeugendensystem für $(V^*)^{\otimes 2}$ ist.

Dass diese Menge linear unabhängig ist, sieht man so:

Sei $\sum A_{ij}\, e^i \otimes e^j = 0$.

Setze (e_{i_0}, e_{j_0}) ein, dann folgt

$$\underbrace{\sum A_{ij}\, e^i(e_{i_0}) \cdot e^j(e_{j_0})}_{= A_{i_0 j_0}} = 0$$

Also gilt für alle i_0, j_0 dass $A_{i_0 j_0} = 0$ qed

(Also alles analog wie für Linearformen!)

Im Fall $W = V$ (statt $W = \mathbb{R}$) schreibt man analog z.B. für

$s = 1$: α Linearform, $v \in V$, dann

$$\alpha \otimes v : V \to V$$
$$w \mapsto \alpha(w) \cdot v$$

$s = 2$: $\alpha, \beta \in V^*$, $v \in V$, dann

$$\alpha \otimes \beta \otimes v : V \times V \to V$$
$$w_1, w_2 \mapsto \alpha(w_1)\, \beta(w_2)\, v$$

etc.

Dann gilt analog zur Prop. oben:

$A : V^s \to V$ multilinear $\Rightarrow$

$$A = \sum_{i_1,\dots,i_s,j=1}^{n} A_{i_1\dots i_s}^{j} \underbrace{e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_s} \otimes e_j}_{\text{Basis von } (V^*)^{\otimes s} \otimes V}$$

mit $A_{i_1\dots i_s}^{j}$ bestimmt durch

$$A(e_{i_1},\dots,e_{i_s}) = \sum_j A_{i_1\dots i_s}^{j} e_j$$

Bem: Für Bilinearformen ist $(A_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ die altbekannte Darstellung bzgl. der Basis, ebenso für lineare Abbildungen $V \to V$ ist $(A_i^{\ j})_{i,j=1\dots n}$ deren Matrix.

Sei nun M eine Mgfk.

Def a) Sei $s \in \mathbb{N}$. Ein $(0,s)$-Tensor (oder Tensor vom Typ $(0,s)$ oder s-fach kovarianter Tensor) ist eine Zuordnung A, die jedem $p \in M$ ein

$$A_p \in (T_p^*M)^{\otimes s} \text{ zuordnet, d.h.}$$

$$A_p : \underbrace{T_pM \times \dots \times T_pM}_{s \text{ Faktoren}} \to \mathbb{R} \text{ multilinear,}$$

und so dass A_p glatt von p abhängt.

b) Ein <u>$(1,s)$-Tensor</u> (oder s-fach kovarianter und 1-fach kontravarianter Tensor)

ordnet jedem $p \in M$ eine multilineare Abbildung

$$A_p : \underbrace{T_pM \times \ldots \times T_pM}_{s \text{ Faktoren}} \longrightarrow T_pM$$

zu (glatt in p).

<u>Bem</u>:

1) Der Einheitlichkeit halber kann man auch $s=0$ zulassen; was heißt dies?
Zunächst für einen Vektorraum V:
Per Definition ist $V^0 = \mathbb{R}$.
Eine „0-Linearform" ist also eine lineare Abbildung

$$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Jedes solche α ist von der Form $\alpha(t) = c \cdot t$ für ein $c \in \mathbb{R}$. $(c = \alpha(1))$
Also kann man 0-Linearformen mit Zahlen $\in \mathbb{R}$ identifizieren.
Analog ist jede lineare Abbildung

$$\alpha : \mathbb{R} \to V$$

von der Form $\alpha(t) = tv$ für ein $v \in V$.
(setze $v = \alpha(1)$).
Die Menge dieser linearen Abbildungen kann man also mit V identifizieren.

Also ist sinnvoll, die Definition so zu ergänzen:

Def: c) Ein $(0,0)$-Tensor ist eine glatte Funktion
$$M \to \mathbb{R}$$

Ein $(1,0)$-Tensor ist ein Vektorfeld auf M.

Bem: Es gibt auch (r,s)-Tensoren mit $r \geq 2$, diese kommen aber seltener vor (in dieser VL gar nicht).

Wer nun glaubt, dies müssten dann multilineare Abbildungen $V^s \to V^r$ sein, irrt sich!!

(korrekte Antwort: (r,s)-Tensor $\hat{=}$ Multilinearform $(V^*)^r \times V^s \to \mathbb{R}$.)

(siehe z.B. Kühnel)

Tensoren in lokalen Koordinaten

Nach all den Vorbereitungen ist das nun einfach:

- A $(0,s)$-Tensor, dann

$$A = \sum_{i_1,\dots,i_s} A_{i_1 \dots i_s} \, dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_s}$$

mit $A_{i_1 \dots i_s} = A\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_s}}\right)$

- A $(1,s)$-Tensor, dann

$$A = \sum_{i_1,\dots,i_s,j} A^j_{i_1 \dots i_s} \, dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_s} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}$$

mit $\sum A^j_{i_1 \dots i_s} \frac{\partial}{\partial x^j} = A\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_s}}\right)$.

Hierbei sind $A_{i_1 \dots i_s} : U \to \mathbb{R}$

(bzw. $A^j_{i_1 \dots i_s} : U \to \mathbb{R}$)

Funktionen, und Glattheit des Tensors bedeutet Glattheit dieser Funktionen, per Definition.

Beispiele:

- 1-Form = $(0,1)$-Tensor
- Die Weingartenabbildung einer Hyperfläche $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist ein $(1,1)$-Tensor.
- 1. und 2. Fundamentalform sind $(0,2)$-Tensoren.
- Riemannscher Krümmungstensor (s. unten) ist ein $(1,3)$-Tensor.