Tensoren und Vektorfelder

(Wir betrachten hier nur $(0,s)$-Tensoren, der Fall von $(1,s)$-Tensoren ist vollkommen analog.)

Sei A ein $(0,s)$-Tensor auf M.
Statt einzelner Vektoren können wir auch Vektorfelder einsetzen:

$$A(X_1, \dots, X_s) \quad \text{für} \quad X_1, \dots, X_s \in \mathfrak{X}(M).$$

Dies ist eine Funktion auf M (bzw. ein Vektorfeld für $(1,s)$ Tensoren A):

$$(*) \quad \big(A(X_1, \dots, X_s)\big)(p) := A_p(X_{1p}, \dots, X_{sp})$$

Damit definiert A eine Abbildung, welche mit A bezeichnet:

$$A: \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{s \text{ Faktoren}} \to C^\infty(M)$$

Diese ist $\mathbb{R}$-multilinear, d.h. $\forall X_1, \dots, X_s, X_1' \in \mathfrak{X}(M)$

$$A(X_1 + X_1', X_2, \dots, X_s) = A(X_1, \dots, X_s) + A(X_1', \dots, X_s)$$

und $A(aX_1, X_2, \dots, X_s) = a \cdot A(X_1, \dots, X_s)$ für $a \in \mathbb{R}$

(und analog an den Stellen $2, \dots, s$).

Sie ist sogar $C^\infty(M)$-multilinear, d.h.

$$A(gX_1, X_2, \dots, X_s) = g\, A(X_1, \dots, X_s) \quad \text{für } g \in C^\infty(M)$$

(Denn $A(gX_1, X_2, \ldots, X_s)(p) = A_p(g(p)X_{1p}, X_{2p}, \ldots, X_{sp})$

$\overset{(A_p \text{ multilinear})}{=} g(p)\, A_p(X_{1p}, \ldots, X_{sp})$

$= \big(g \cdot A(X_1, \ldots, X_s)\big)(p)$.)

Analog $\mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{X}(M)$. Erinnerung: $[\ ,\ ]: \mathfrak{X}(M)^2 \to \mathfrak{X}(M)$. Ist das ein Tensor? Nein! Denn:

Es gilt umgekehrt:

<u>Satz</u>: Eine $\mathbb{R}$-multilineare Abbildung

$$A: \mathfrak{X}(M)^s \to C^\infty(M) \qquad (\text{bzw. } \to \mathfrak{X}(M))$$

ist genau dann durch einen Tensor gegeben, wenn sie sogar $C^\infty(M)$-multilinear ist.

(d.h. wenn man „Funktionen rausziehen" darf)

<u>Beispiel</u>:

Die Lie-Klammer $[\ ,\ ]: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ ist $\mathbb{R}$-bilinear, aber nicht $C^\infty(M)$-bilinear, also kein Tensor!

<u>Wozu ist das gut?</u>

Manche Tensoren lassen sich am einfachsten dadurch definieren, dass man sie auf Vektorfelder anwendet, nicht auf Vektoren.

Man rechnet dann nach, dass diese definierte Abbildung $C^\infty(M)$-linear ist.

Wichtigstes Beispiel hierfür: Krümmungstensor.

Bem: Dass A (im Satz) „durch einen Tensor gegeben" ist, bedeutet:

Um $A(X_1,\dots,X_s)$ bei $p\in M$ auszuwerten, braucht man nur die Werte von $X_1,\dots,X_s$ bei p zu kennen.
(Also z.B. nicht die Werte nahebei, oder Ableitungen bei p – wie dies z.B. bei $[X,Y]$ der Fall war, daher ist $[\ \ ]$ kein Tensor.)

Denn es soll ja $(*)$ (Seite) gelten.

Beweis des Satzes
(Der Einfachheit halber für $s=1$).
„$\Rightarrow$": haben wir vor dem Satz gezeigt

„$\Leftarrow$": Sei $A: \mathcal{X}(M) \to C^\infty(M)$ $C^\infty(M)$-multilinear
Sei $p\in M$
Sei $v \in T_pM$ gegeben. Wähle ein Vektorfeld $X\in\mathcal{X}(M)$ mit $X_p = v$ und setze
$$A_p(v) := (A(X))(p).$$

Wenn wir zeigen können, dass die rechte Seite von der Wahl von X unabhängig ist, sind wir fertig.

Bleibt zu zeigen: Falls $X, Y\in\mathcal{X}(M)$ mit $X_p = Y_p$, so folgt $(A(X))(p) = (A(Y))(p)$.

Setze $Z = X - Y$. Bleibt zu zeigen:
$$Z_p = 0 \Rightarrow (A(Z))(p) = 0$$

Beweis hiervon:

Wähle lokale Koordinaten nahe p und schreibe

$$Z = \sum Z^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{auf } U$$

Dann $Z_p = 0 \Rightarrow Z^i(p) = 0 \ \forall i$

Idee: $A(Z) = A\left(\sum Z^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right)$

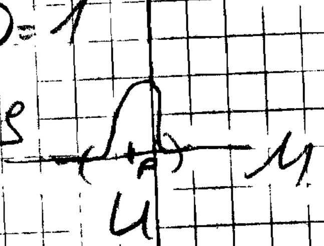
$$= \sum Z^i A\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \quad (C^\infty\text{-linear!})$$

also $(A(Z))(p) = \sum Z^i(p)\, A\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = 0$

Schönheitsfehler dabei: Die Z^i und $\frac{\partial}{\partial x^i}$ sind nur auf U, nicht auf ganz M definiert

(also ist z.B. $A\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ nicht definiert)

Reparatur: Wähle $\rho \in C_0^\infty(U)$ mit $\rho(p) = 1$



Dann $\rho^2 A(Z) = A(\rho^2 Z)$

$$= A\left(\sum \rho Z^i \cdot \rho \frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

$$= \sum \rho Z^i \, A\left(\rho \frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

Werte bei p aus $\Rightarrow$ ok.

(Trick: ρZ^i ist auf ganz M definiert und glatt, wenn man es außerhalb U gleich 0 setzt. $\rho \frac{\partial}{\partial x^i}$ ebenfalls.)

V.5 Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Auf Mannigfaltigkeiten gibt es keinen Abstandsbegriff. Um einen solchen zu erhalten, braucht man zusätzliche Daten: Eine Riemannsche Metrik, die infinitesimale Version des Abstands.

<u>Def</u>: Sei M Mgfk. Eine <u>Riemannsche Metrik</u> auf M ist ein $(0,2)$-Tensor g, für den

$$g_p: T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

für jedes $p \in M$ symmetrisch und positiv definit ist.
(M, g) heißt <u>Riemannsche Mannigfaltigkeit</u>.
Also: g = ein Skalarprodukt g_p auf T_pM für jedes p.

Schreibweise in lokalen Koordinaten:

$$g = \sum_{i,j} g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$$

ZB $n=2$: $g = g_{11}\, dx^1 \otimes dx^1 + g_{12}\, dx^1 \otimes dx^2 + g_{21}\, dx^2 \otimes dx^1 + g_{22}\, dx^2 \otimes dx^2$

Wegen $g_{12} = g_{21}$ kann man dies einfacher schreiben:
<u>Notation</u>: $\alpha\beta := \frac{\alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha}{2}$ (symmetrisches Produkt der Linearformen α, β)
$\alpha^2 := \alpha\alpha$

$\Rightarrow g = g_{11}\,(dx^1)^2 + 2 g_{12}\, dx^1 dx^2 + g_{22}\,(dx^2)^2$

Beispiele

- $\mathbb{R}^n$ mit euklidischer Metrik g_{eukl}

$$g_{eukl} = (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2$$

- $M \subset \mathbb{R}^N$ Untermannigfaltigkeit,

$$g_p(v,w) := \langle v,w \rangle \quad \text{Skalarprodukt in } \mathbb{R}^N)$$

(1. Fundamentalform)

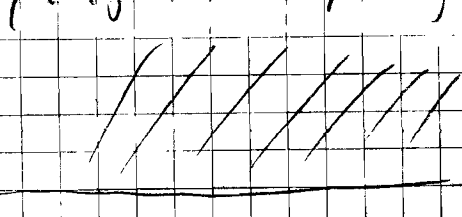
$\Rightarrow g$ ist Riemannsche Metrik auf M
("induzierte Metrik")

Bem: Allgemeiner kann man zu einer Mgfk K der Dimension N den Begriff „Untermannigfaltigkeit M von K^n" definieren.

Ist dann g^K eine Riemannsche Metrik auf K, so definiert diese durch Einschränkung eine Riemannsche Metrik g^M auf M (die induzierte R Metrik)

$$g^M(v,w) := g^K(v,w) \quad \forall v,w \in T_pM \subset T_pK$$

· Hyperbolische Metrik auf $\mathbb{H} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$



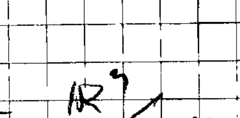
$$g_{(x,y)} := \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

(Diese hat viele interessante Eigenschaften und ist besonders im Zusammenhang mit Algebra und Zahlentheorie interessant, in der Physik auch im Bereich „Quantenchaos" viel verwendet)

· Flache Metrik auf dem Torus $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$:

$$g = \sum (dx^i)^2$$

(Diese ist verschieden von der Metrik, die man erhält, wenn man z.B. T^2 in $\mathbb{R}^3$ einbettet und die induzierte Metrik nimmt!)



T^2

(g ist flach, d.h. hat Krümmung $\equiv 0$, da dies in $\mathbb{R}^n$ gilt und (T^n, g) lokal isometrisch zu $\mathbb{R}^n$ ist)

<u>Bem</u>: Allgemeiner Begriff:

Pseudoriemannsche Metrik:

g_p symmetrisch, nicht ausgeartet

(aber nicht notwendig positiv definit).

Nicht ausgeartet :⟺ Die Matrix $(g_{ij}(p))_{ij=1,\dots,n}$ ist invertierbar

<u>Signatur</u> von g ist (a,b), wobei

a = Anzahl positiver Eigenwerte von $(g_{ij}(p))$

b = Anzahl negativer Eigenwerte

<u>Bem</u>: • a,b sind unabhängig von der Wahl der Koordinaten (Trägheitssatz von Sylvester)

• g_p stetig ⟹ a,b sind unabhängig von p (falls M zusammenhängend)

<u>Beispiel</u>: Nach Einstein ist

$$M = \{ \text{Ereignisse in der Welt} \}$$

als 4-dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer pseudoriemannschen Metrik der Signatur (3, 1) zu betrachten.

(Lokale Koordinaten sind durch (x, y, z, t) gegeben, wobei x, y, z die Ortskoordinaten eines Punktes und t der Zeitpunkt des „Ereignisses" ist. $g = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2$,

falls x, y, z bzgl. eines „Inertialsystems" gemessen (*)

Mehr hierzu: Siehe O'Neill: Semi-Riemannian geometry. With applications to relativity.

(*) und kein Gravitationsfeld vorhanden ist!