Auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit sind nun alle Begriffe definiert, die wir im ersten Teil der Vorlesung als intrinsisch bezeichnet hatten, z.B.:

- Länge einer Kurve
- Abstand zwischen zwei Punkten
- Winkel zwischen zwei Kurven in einem Punkt, wo sie sich schneiden
- Volumen, Integration von Funktionen

V.6 Kovariante Ableitung(en)

Für Untermgf. $M \subset \mathbb{R}^N$ hatten wir gesehen, dass zentrale geometrische Begriffe wie Parallelität, Geodäten, Krümmung mit Hilfe der kovarianten Ableitung ∇ beschrieben werden können.

∇ war zunächst extrinsisch definiert aber dann als intrinsische Größe identifiziert worden.

Wir wollen nun ∇ gleich intrinsisch einführen.

Ein Weg hierzu wäre, die Formel für die Christoffel-Symbole (mittels der g_{ij}) zu verwenden.

$\rightsquigarrow$ Def. von ∇ mittels lokaler Koordinaten

Man müsste dann nachprüfen, dass dies unabhängig von der Wahl der Koordinaten ist.

Stattdessen verfolgen wir einen anderen Weg.

Dieser ist invariant, d.h. verwendet keine lokalen Koordinaten. Dies macht die Sache übersichtlicher (obwohl dies auch eine Geschmacksfrage ist!).

Zunächst führen wir einen allgemeineren Begriff ein, indem wir einige wichtige Eigenschaften von ∇ als „Axiome" nehmen.

<u>Def</u>: Sei M eine Mgfk.

Eine <u>kovariante Ableitung</u> (oder (affiner) <u>Zusammenhang</u>) <u>auf M</u> ist eine Abbildung

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$
$$X \; , \; Y \; \mapsto \nabla_X Y$$

mit folgenden Eigenschaften:

1) ∇ ist $C^\infty(M,\mathbb{R})$-linear bzgl. des ersten Arguments, d.h.

$$\nabla_{X_1+X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y \qquad X, Y, X_i \in \mathfrak{X}(M)$$
$$\nabla_{hX} Y = h \, \nabla_X Y \qquad h \in C^\infty(M,\mathbb{R})$$

2) ∇ ist $\mathbb{R}$-linear bzgl. des zweiten Arguments, d.h.

$$\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$$
$$\nabla_X (c\,Y) = c \, \nabla_X Y \qquad c \in \mathbb{R}$$

3) Für $h \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ gilt

$$\nabla_X (hY) = h \, \nabla_X Y + (Xh) \cdot Y$$

Also: ∇_X verhält sich bzgl. X wie ein Tensor.
Insbesondere hängt $(\nabla_X Y)_p$ nur von X_p (und von Y) ab.
Aber ∇ ist nicht tensoriell bzgl. Y. Um $(\nabla_X Y)_p$ zu bestimmen, genügt es nicht, (X und) Y_p zu kennen!

Wichtig:
Es gibt viele kovariante Ableitungen.
(Einfache Übung: Sei A ein $(1,2)$ Tensor und ∇ eine kov. Ableitg.
Dann ist ∇', definiert durch

$$\nabla'_X Y := \nabla_X Y + A(X,Y)$$

eine kovariante Ableitung.
Jede kovariante Ableitung entsteht aus einer gegebenen kovarianten Ableitung ∇ auf diese Art.)

Eine kov. Abl. gibt einem eine Vorschrift, wie man ein Vektorfeld Y in Richtung eines Vektors X_p „ableitet".

Dass man dafür eine extra Vorschrift braucht, sieht man schon daran, dass Y_q für verschiedene q in verschiedenen Räumen $T_q M$ liegt. Diese haben zunächst keine Beziehung zueinander (*)
(ZB macht es keinen Sinn, von Gleichheit eines Vektors in $T_q M$ mit einem Vektor in $T_{q'} M$ für $q \neq q'$ zu sprechen.)
Eine Wahl eines ∇ stellt eine solche Beziehung her.
Man nennt eine kovariante Ableitung daher auch

(*) außer der Mannigfaltigkeitsstruktur auf TM

einen <u>Zusammenhang</u> auf M.

Beachte, dass der Begriff „kovariante Ableitung" keinen Bezug auf eine Riemannsche Metrik nimmt. Dieser wird durch den folgenden Satz hergestellt:

<u>Satz</u> („Fundamentallemma der Riemannschen Geometrie")

Sei (M,g) Riemannsche Mgfk.

Es gibt genau eine kovariante Ableitung, die (zusätzlich zu 1)-3)) folgende Bedingungen erfüllt: $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ gilt:

4) $X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$

(∇ ist <u>mit g verträglich</u> oder <u>∇ ist metrisch</u>)

5) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$

(∇ ist „<u>torsionsfrei</u>")

<u>Bem</u>: Was 5) mit Torsion (Verwindung) im üblichen Sinn (zB für Kurven) zu tun hat, wird in den meisten Diffgeometrie Büchern nicht erklärt.(*) Siehe zB die englische Wikipedia-Seite unter „Torsion tensor" für eine Erklärung.

(*) Spivak schreibt in seinem berühmten Klassiker (Band II Kap 5 des 5-bändigen Werks zur Diff Geo): „no one seems to have a good explanation"

Beachte, dass 5) impliziert, dass (in beliebigen Koordinaten)

$$(*) \qquad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad \forall i,j$$

(denn $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$). Es ist nicht schwer zu zeigen, dass umgekehrt diese Gleichheit 5) impliziert.

Die Christoffelsymbole eines Zusammenhangs ∇ werden wie früher mittels

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

definiert. (*) bedeutet dann die Symmetrie in ij:

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$

(Vorsicht: Trotz der parallelen Schreibweise mit oberen und unteren Indizes sind die Γ_{ij}^k nicht die Komponenten eines Tensors, da $\nabla_X Y$ bzgl. Y nicht tensoriell ist!)

<u>Beweis des Satzes</u>

Entweder mit Koordinaten (s. Erklärungen oben + Rechnungen von früher),

oder indem man die alten Rechnungen in der neuen invarianten Weise wiederholt:

Für beliebige X, Y, Z schreibe 4) dreimal hin, wobei X, Y, Z zyklisch permutiert werden, also

$X\, g(Y,Z) = \ldots, \quad Y\, g(Z,X) = \ldots, \quad Z\, g(X,Y) = \ldots$

Addiere die ersten beiden Gleichungen, subtrahiere.
Mit Hilfe von 5) fallen alle ∇-Terme weg, außer $\nabla_X Y$, und Auflösen danach liefert

$$g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}\Big[X g(Y,Z) + Y g(Z,X) - Z g(X,Y) - g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y])\Big] \qquad (**)$$

Da dies für alle Z gilt, ist $\nabla_X Y$ eindeutig bestimmt.
Umgekehrt definiert dies $\nabla_X Y$. Dann muss man nachrechnen, dass sich $(X,Y,Z) \mapsto$ (die rechte Seite von $(**)$) bzgl. X und Z tensoriell verhält und bzgl. Y das richtige (in 3) angegebene) Verhalten hat.
Dies ist eine einfache Rechnung mittels der Regel für $[X, hY] = \ldots$ $\blacksquare$

$(**)$ heißt <u>Koszul-Formel</u>

<u>Def</u> Der durch g wie im Satz festgelegte Zusammenhang heißt <u>Levi-Civita-Zusammenhang</u>.
(Manchmal schreibt man dafür ∇^{LC}.)

<u>Bem</u>: In lokalen Koord. gilt dieselbe Formel für Γ_{ij}^k wie für Unter-Mgfl. (Seite 57), da in der Herleitung nur 1)-5) verwendet wurde.

Addiere die ersten beiden Gleichungen, subtrahiere.

Mit Hilfe von 5) fallen alle ∇-Terme weg, außer $\nabla_X Y$,

und Auflösen danach liefert

$$g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}\Big[X g(Y,Z) + Y g(Z,X) - Z g(X,Y) \qquad (**)$$
$$- g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]) \Big]$$

Da dies für alle Z gilt, ist $\nabla_X Y$ eindeutig bestimmt.

Umgekehrt definiert dies $\nabla_X Y$. Dazu muss man nachrechnen,

dass sich $(X,Y,Z) \mapsto$ (die rechte Seite von $(**)$)

bzgl. X und Z tensoriell verhält und bzgl. Y

das richtige (in 3) ausgedrückte) Verhalten hat.

Dies ist eine einfache Rechnung mittels der Regel

für $[X, hY] = \ldots$ ∎

$(**)$ heißt <u>Koszul-Formel</u>

<u>Def</u>: Der durch g wie im Satz festgelegte

Zusammenhang heißt <u>Levi-Civita-Zusammenhang</u>

(Manchmal schreibt man dafür ∇^{LC}.)

<u>Bem</u>: In lokalen Koord. gilt dieselbe Formel für Γ_{ij}^k wie für Unter-Mgfl. (Seite 57), da in der Herleitung nur 1)-5) verwendet wurde.

Bem.: Die früher für Untermgf. $M \subset \mathbb{R}^N$ definierte kovariante Ableitung ist genau der Levi-Civita-Zusammenhang (bzgl. der vom $\mathbb{R}^N$ induzierten Metrik g).

Siehe die Bem. S. 216 oben für den Beweis von 5) → Denn er erfüllt 1)–5), das folgt also aus der Eindeutigkeit (anderes Argument: selbe Formel in Koordinaten)

Sei ∇ eine kovariante Ableitung (zunächst beliebig)
Man hat dann, wie früher eingeführt, folgende Begriffe:

- Kovariante Ableitung eines Vektorfelds X entlang einer Kurve γ

$$\frac{\nabla}{dt} X := \nabla_{\dot\gamma} X$$

- Parallelität eines Vektorfelds X entlang einer Kurve γ:

$$\frac{\nabla}{dt} X = 0$$

- Parallelverschiebung: $\gamma : [a,b] \to M$ Kurve, dann

$$P_\gamma : T_{\gamma(a)} M \to T_{\gamma(b)} M$$

definiert mittels parallele Vektorfelder entlang γ.
P_γ ist immer linear + bijektiv. Zusätzlich gilt:

∇ ist mit g verträglich $\Leftrightarrow$ P_γ ist orthogonal

(Beweis von "$\Rightarrow$": Seite 78; Beweis von "$\Leftarrow$": Übung)

- Geodäte γ: $\nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma = 0$

Es gilt:

∇ mit g verträglich und torsionsfrei
$\Rightarrow$ kürzeste Linien sind Geodäten

(siehe den Beweis auf S. 86 der Variationsformel für die Kurvenlänge; hierbei wurde

$$\nabla_{\frac{\partial\gamma}{\partial s}} \frac{\partial\gamma}{\partial t} = \nabla_{\frac{\partial\gamma}{\partial t}} \frac{\partial\gamma}{\partial s}$$

verwendet, was genau die Bedingung „torsionsfrei" ist!)

- Geodätische Krümmung (s. Seite 93): (∇ mit g verträglich)
  für orientierte Flächen mit Vorzeichen: $\kappa_g \in \mathbb{R}$
  sonst ohne: $\kappa_g \geq 0$. ($\kappa_g = \| \frac{\nabla}{dt} \dot\gamma \|$)

- Der Krümmungstensor, s. unten

V.7 Der Riemannsche Krümmungstensor

Erinnerung:

Für Hyperflächen $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ haben wir (s. 63 ff., insbes. s. 68)

den Krümmungstensor in Koordinaten mittels

$$(*) \quad \sum R^k_{lij}\, \partial_k = \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} \partial_l - \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i} \partial_l$$

definiert ($\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$, was dort als $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ geschrieben wurde).

Hier wird also den 3 Vektorfeldern $\partial_i, \partial_j, \partial_l$ das Vektorfeld auf der rechten Seite von (*) zugeordnet.

(Motivation: für Flächen kann man damit die Gaußkrümmung ausdrücken)

Wie lässt sich das invariant, d.h. ohne Koordinaten, ausdrücken?

Satz + Def.: Sei (M,g) Riemannsche Mgfk. Die Abbildung $\mathfrak{X}(M)^3 \to \mathfrak{X}(M)$, die drei Vektorfeldern X, Y, Z das Vektorfeld

$$R(X,Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

zuordnet, ist ein Tensor, der Riemannsche Krümmungstensor. (*)

Beweis: Offenbar ist R $\mathbb{R}$-multilinear. Wir müssen nur zeigen, dass man Funktionen „rausziehen" kann, aus jedem der drei Argumente X, Y, Z.

Wir tun das exemplarisch für Y und lassen Z der Kürze halber in der Notation weg:

(*) Genauer: Sei ∇ eine kovariante Ableitung. Dann ist R ein Tensor. Für $\nabla = \nabla^{LC}$ heißt R Riemannscher Krümmungstensor.

$$R(X, hY) = \nabla_X \nabla_{hY} - \nabla_{hY} \nabla_X - \nabla_{[X, hY]}$$

$$= \nabla_X h \nabla_Y - h \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{h[X,Y] + (Xh)Y}$$

$$= h \nabla_X \nabla_Y + (Xh) \nabla_Y - h \nabla_Y \nabla_X - h \nabla_{[X,Y]} - (Xh) \nabla_Y$$

$$= h (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]})$$

$$= h R(X, Y)$$

Für X geht's analog.

Für Z:

$$\nabla_X \nabla_Y hZ = \nabla_X ((Yh)Z + h \nabla_Y Z)$$

$$= (XYh)Z + (Yh)\nabla_X Z + (Xh)\nabla_Y Z + h \nabla_X \nabla_Y Z$$

Vertausche X, Y:

$$\nabla_Y \nabla_X hZ = (YXh)Z + (Xh)\nabla_Y Z + (Yh)\nabla_X Z + h \nabla_Y \nabla_X Z$$

Differenz:

$$\nabla_X \nabla_Y hZ - \nabla_Y \nabla_X hZ = ([X,Y]h)Z + h(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z)$$

Außerdem

$$\nabla_{[X,Y]} hZ = ([X,Y]h)Z + h \nabla_{[X,Y]} Z$$

Differenz:

$$R(X,Y)hZ = h R(X,Y) Z$$

✓ ∎

Bem: • Der Term $\nabla_{[X,Y]} Z$ fehlt in (+), da $[\partial_i, \partial_j] = 0$ ist.

Für beliebige Vektorfelder muss er da sein, damit in der Rechnung oben die Terme mit h-Ableitungen (zB Xh, Yh) herausfallen

(Man hätte aus (*) die Formel für $R(X,Y)Z$ erraten können, wie folgt:
Schreibe $X = \sum X^i \partial_i$, $Y = \sum Y^j \partial_j$, dann muss, damit R ein Tensor wird,

$$R(X,Y) = \sum X^i Y^j R(\partial_i, \partial_j)$$

gelten. Andererseits ist

$$\nabla_X \nabla_Y = \sum X^i \nabla_{\partial_i} \left(\sum Y^j \nabla_{\partial_j}\right)$$

$$= \sum X^i Y^j \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} + \sum X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \nabla_{\partial_j}$$

und analog

$$\nabla_Y \nabla_X = \sum X^i Y^j \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i} + \sum Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \nabla_{\partial_i}$$

also

$$\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X = R(X,Y) + \sum \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right) \nabla_{\partial_j}$$

Die letzte Summe ist aber gerade die lokale Formel für $[X,Y]$, siehe Seite 173.

Selbst nach dieser Rechnung hätte man nachprüfen müssen, dass $R(X,Y)Z$ bzgl. Z tensoriell ist)

- Im Beweis des Satzes wurden nur Eigenschaften 1) - 3) einer kovarianten Ableitung benutzt. Das heißt: Für jede kovariante Ableitung ist ein Krümmungstensor definiert.

- Dass R bzgl. X, Y und Z tensoriell ist, ist eigentlich sehr überraschend.

Immerhin wird Z zweimal abgeleitet, etwa in $\nabla_X \nabla_Y Z$!

Die Aussage ist, dass sich alle Ableitungen von Z in der Gesamtsumme wegheben, und analog für X, Y

Damit hängt $(R(X,Y)Z)_p$ nur von X_p, Y_p, Z_p ab.

Die Bedeutung des Krümmungstensors liegt darin, dass er die Antwort auf folgende Frage gibt:

Gegeben eine Riemannsche Metrik g auf M, wie sehe ich g an, ob es lokal isometrisch zur Euklidischen Metrik ist, d.h. ob es Koordinaten $x^1, \ldots, x^n$ gibt mit

$$g = (dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2 \quad (\text{lokal}) \quad ?$$

<u>Satz</u>: g ist (nahe $p \in M$) lokal isometrisch zur euklidischen Metrik genau dann, wenn

$$R \equiv 0$$

in einer Umgebung von p gilt.

Da man R effektiv aus g berechnen kann, beantwortet das die Frage oben.

<u>Beweis</u>

a) „$\Rightarrow$" ist klar, da $R \equiv 0$ für die euklidische Metrik

b) „$\Leftarrow$": OBdA sei $M = \mathbb{R}^n$ mit Standardkoordinaten $y^1, \ldots, y^n$. $p = 0$

<u>1. Schritt</u>:

Wegen $[\partial_{y^i}, \partial_{y^j}] = 0$ folgt aus $R \equiv 0$, dass

$$\nabla_{\partial_{y^i}} \nabla_{\partial_{y^j}} Z = \nabla_{\partial_{y^j}} \nabla_{\partial_{y^i}} Z \qquad \forall i, j, Z$$

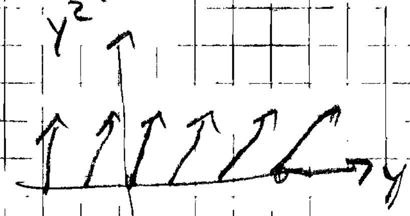
Wir zeigen nun, dass man zu beliebigem Z_0 ein Vektorfeld Z finden kann mit

$$\nabla_{\partial_{y^i}} Z = 0 \qquad \forall i$$

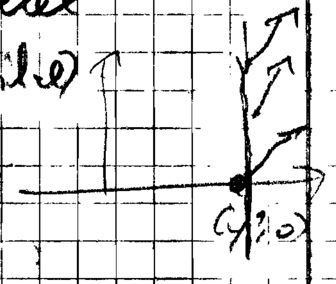
(Etwa für $n=2$.)

Dazu verschiebe zunächst Z_0 parallel entlang der y^1-Achse

⇝ erhalte $Z_{(y^1,0)}$



Für jedes y^1 verschiebe nun $Z_{(y^1,0)}$ parallel entlang der y^2-Geraden durch $(y^1,0)$. (Skizze)
Dies definiert $Z_{(y^1,y^2)}$ $\forall y^1, y^2$.



Wir haben nun:

(1) $\quad \nabla_{\partial_{y^2}} Z = 0 \quad$ überall, per Definition

(2) $\quad \nabla_{\partial_{y^1}} Z = 0 \quad$ bei allen Punkten $(y^1, 0)$.

Nun gilt nach Annahme

$$\nabla_{\partial_{y^2}} \nabla_{\partial_{y^1}} Z = \nabla_{\partial_{y^1}} \nabla_{\partial_{y^2}} Z \quad \text{überall.}$$

Die rechte Seite ist $=0$ wegen (1).
Also ist $\nabla_{\partial_{y^2}}(\nabla_{\partial_{y^1}} Z) = 0$, d.h. $\nabla_{\partial_{y^1}} Z$ ist parallel entlang der vertikalen Geraden. Wegen $(\nabla_{\partial_{y^1}} Z)_{(y^1,0)} = 0$ folgt also $\nabla_{\partial_{y^1}} Z = 0$ entlang der ganzen Geraden $y_2 \mapsto (y_1, y_2)$.

Also gilt auch $\quad \nabla_{\partial_{y^1}} Z = 0 \quad$ überall.

Der Beweis für beliebiges n verläuft analog.

Also gilt $\quad \nabla_{\partial_{y^i}} Z = 0 \quad \forall i \quad$ und daher

$$\nabla_Y Z = 0 \quad \text{für alle } Y.$$

Schritt 2:

Wähle nun Vektorfelder $Z_1, \ldots, Z_n$ wie im 1. Schritt so, dass $(Z_1)_0, \ldots, (Z_n)_0$ eine orthonormale Basis bilden.
Da ∇ torsionsfrei ist, gilt $\forall i, j$

$$[Z_i, Z_j] = \nabla_{Z_i} Z_j - \nabla_{Z_j} Z_i = 0 - 0 = 0.$$

Die Vektorfelder $Z_1, \ldots, Z_n$ kommutieren also, und nach Satz Seite 182 gibt es Koordinaten (nahe 0) $x^1, \ldots, x^n$ mit

$$Z_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \forall i, \text{ nahe } 0$$

Schritt 3:

Da die Z_i bei 0 orthonormal sind und parallel entlang jeder Kurve sind, sind sie in jedem Punkt orthonormal.
Also ist $\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p$ in jedem Punkt eine ON-Basis, d.h. die Metrik hat in diesen Koordinaten die Form

$$g = (dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2$$

qed.