Zur geometrischen Interpretation von ∇, R:

Oben wurden ∇, R formal, als „Rechenobjekte", eingeführt. Das ist praktisch, wenn man wirklich etwas rechnen will, aber natürlich nur die halbe Wahrheit, da wir ja Geometrie machen wollen.

∇:

Der Levi-Civita-Zshg. kann so motiviert werden: Im Fall von Untermgf. $M \subset \mathbb{R}^N$ ist das der „alte" Begriff von ∇, der ja (extrinsisch) geometrisch motiviert war ($\nabla_X Y$ = tangentialer Anteil von $\nabla_X^{\mathbb{R}^N} Y = dY(X)$).

Aber was ist ein allgemeiner Zusammenhang?
Eine Antwort:

Ein Zshg. ∇ definiert einen Begriff „Parallelverschiebung" P^∇, umgekehrt legt ein Begriff von Parallelverschiebung P einen Zshg. ∇ eindeutig fest, derart, dass dann $P = P^\nabla$ ist.

Dabei ist, per Definition, ein (Begriff von) Parallelverschiebung eine Zuordnung $\gamma \longmapsto P_\gamma$, die jedem Weg $\gamma: I \to M$ und zu allen $s, t \in I$ einen Vektorraumisomorphismus

$$P_{\gamma, s\to t} : T_{\gamma(s)} M \to T_{\gamma(t)} M$$

zuordnet, derart, dass gilt:

1) $P_{\gamma, s\to s}$ = Identität auf $T_{\gamma(s)} M \quad \forall \gamma, s$

2) $P_{\gamma, s\to t} \circ P_{\gamma, r\to s} = P_{\gamma, r\to t} \quad \forall \gamma;\ r, s, t \in I$

3) $P_{\gamma, s, t}$ hängt „glatt" von γ, s, t ab.

(Dabei ist es nicht ganz einfach, zu sagen, was 3) genau bedeuten soll. U.a. wird es implizieren, dass der unten definierte Zshg. $\nabla_X Y$ linear von X abhängt.)

Offenbar hat die durch einen Zshg. ∇ definierte Parallelverschiebung $P = P^\nabla$ diese Eigenschaften.

Umgekehrt: gegeben P, definiere

$$(\nabla_X Y)_p = \lim_{t \to 0} \frac{P_{\gamma, t \to 0}(Y_{\gamma(t)}) - Y_{\gamma(0)}}{t},$$

wobei $\gamma : [0, \varepsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = p$, $\dot\gamma(0) = X$

(Übung: Ist ∇ ein Zshg. und $P = P^\nabla$, so gilt die Formel.)

(<u>Bem</u>: Für $\nabla = \nabla^{\mathbb{R}^n, \text{gewöhnl.}}$ ist das einfach die Definition der Ableitung.)

<u>Fazit</u>: „Zusammenhang" und „Parallelverschiebung" sind äquivalente Begriffe, aber Parallelverschiebung ist wohl leichter geometrisch vorstellbar (aber schwieriger zum Rechnen).

Krümmungstensor und Parallelverschiebung

Wir leiten eine Interpretation von R mittels der Parallelverschiebung her, mit einer Rechnung in Koordinaten.

Vorüberlegung. Kovariante Ableitung in Koordinaten

Schreibe $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$. Sei $Z = \sum Z^j \partial_{x^j}$ Vektorfeld.

Dann

$$\nabla_{\partial_i}\Big(\sum_j Z^j \partial_j\Big) = \sum_j \frac{\partial Z^j}{\partial x^i}\partial_j + \sum_{j,k} Z^j \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

$$= \sum_j \Big(\frac{\partial}{\partial x^i} Z^j + \sum_{j,k} Z^k \Gamma_{ik}^j\Big)\partial_j$$

Zur Abkürzung schreiben wir $Z = \begin{pmatrix} Z^1 \\ \vdots \\ Z^n \end{pmatrix}$, $\Gamma_i = (\Gamma_{ik}^j)_{k,j=1..n}$ (Matrix)

dann ist das

$$\boxed{\nabla_{\partial_i} Z = \partial_i Z + \Gamma_i Z}$$

(als Gleichung zwischen Vektorfeldern $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; $\Gamma_i Z$ = Matrix · Spalten-Vektor

Bem.: Diese Formel ist zum Rechnen äußerst nützlich

- Sie zeigt, dass die Γ_i (also die Γ_{ij}^k) die Abweichung von ∇_{∂_i} von der „üblichen" kovarianten Ableitung ∂_i ($= \nabla^{LC}$ bzgl. g_{eukl} $= \nabla^{\mathbb{R}^n}$ in Notation von früher) angeben

  ($\Gamma_i = 0$ für $g = g_{\text{eukl}}$).

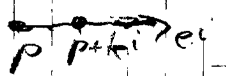
Parallelverschiebung in Koordinaten

Z ist parallel entlang einer zur x^i-Achse parallelen Geraden

$\Leftrightarrow \quad \nabla_{\partial_i} Z = 0 \quad \Leftrightarrow$

$$(\partial_i + \Gamma_i) Z = 0$$

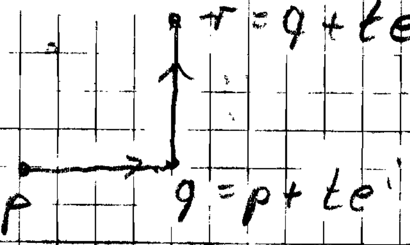
Ist also $\quad Z_t := Z_{p+te^i}$, so



$$(*) \qquad \dot{Z} + \Gamma_i Z = 0.$$

(Das ist das lineare DGL-System für Parallelverschiebung.)

Um die Verbindung zur Krümmung herzustellen, betrachten wir den folgenden Weg:



und verschieben einen Vektor $Z_p \in T_p\mathbb{R}^n$ parallel.
Wir betrachten die Taylorentwicklung bzgl. $t \to 0$ zu 2. Ordnung:

$$Z_q = Z_p + t\,\dot{Z}_p + \frac{t^2}{2}\ddot{Z}_p + O(t^3)$$

Aus (*) folgt $\quad \dot{Z}_p = -\Gamma_i Z_p$

und Ableiten $(\Gamma_i' = \partial_i \Gamma_i)$ $\quad \ddot{Z} + (\partial_i \Gamma_i) Z + \Gamma_i \dot{Z} = 0$

$$\Rightarrow \quad \ddot{Z} + (\partial_i \Gamma_i - \Gamma_i^2) Z = 0$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{Z}_p = (\Gamma_i^2 - \partial_i \Gamma_i)$$

also

$$Z_q = Z_p - t\,\Gamma_i Z_p + \frac{t^2}{2}(\Gamma_i^2 - \partial_i \Gamma_i) Z_p + O(t^3)$$

(alle Γ_i bei p ausgewertet!)

Nun verschieben wir Z_q parallel nach Z_r, und es folgt analog

$$Z_r = Z_q - t\,\Gamma_j(q)\, Z_q + \frac{t^2}{2}\left(\Gamma_j(q)^2 - \partial_j \Gamma_j(q)\right) Z_q + O(t^3)$$

Beachte, dass alles bei q ausgewertet wird. Wir drücken das nun durch die Werte bei p aus:

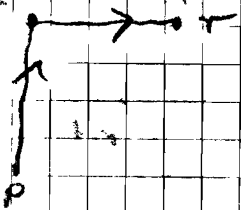
$$\Gamma_j(q) = \Gamma_j(p) + t\,\partial_i \Gamma_j(p) + O(t^2)$$

Damit (und mit der Formel für Z_q) folgt (wieder alle Γ bei p ausgewertet):

$$Z_r = Z_p - t\,\Gamma_i Z_p + \frac{t^2}{2}(\Gamma_i^2 - \partial_i \Gamma_i) Z_p - t\,(\Gamma_j + t\,\partial_i \Gamma_j)(Z_p - t\,\Gamma_i Z_p)$$
$$+ \frac{t^2}{2}(\Gamma_j^2 - \partial_j \Gamma_j) Z_p + O(t^3)$$

$$= Z_p - t\,(\Gamma_i + \Gamma_j) Z_p + \frac{t^2}{2}\left[(\Gamma_i^2 - \partial_i \Gamma_i) - 2(\partial_i \Gamma_j - \Gamma_j \Gamma_i) + (\Gamma_j^2 - \partial_j \Gamma_j)\right] Z_p$$
$$+ O(t^3)$$

Man kann nun stattdessen Z_p auch entlang



parallelverschieben, mit Resultat

$Z_r' =$ (dieselbe Formel wie Z_r, aber mit i, j vertauscht)

Also folgt
$$Z_r' - Z_r = t^2(\partial_i \Gamma_j - \partial_j \Gamma_i + \Gamma_i \Gamma_j - \Gamma_j \Gamma_i) + O(t^3)$$

Man vergleiche dies mit der Formel für R (Seite 66)

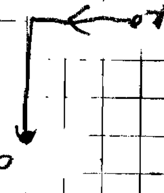
$$\boxed{R_{ij} = \partial_i \Gamma_j - \partial_j \Gamma_i + \Gamma_i \Gamma_j - \Gamma_j \Gamma_i}$$

(Hierbei ist R_{ij} die Matrix $(R^k_{\ell ij})_{k,\ell=1,\dots,n}$, wobei k die Zeilen und ℓ die Spalten numeriert, wie bei $\Gamma_i = (\Gamma^k_{ij})_{j,l=1,\dots,n}$, so dass $R^k_{\ell ij} Z^\ell$ = Produkt Matrix mal Spaltenvektor)

Wir haben also erhalten:

$$Z_r' - Z_r = t^2 (R_{ij} Z_p) + O(t^3)$$

Etwas hübscher wird das, wenn wir beide Seiten dieser Gleichung entlang



parallel „zurück" transportieren.

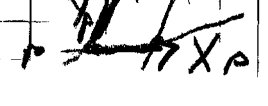
Aus Z_r' wird dann Z_p und aus $R_{ij} Z_p$ wird $R_{ij} Z_p + O(t)$, d.h. hier wird der Fehler in $O(t^3)$ absorbiert, und es folgt:

Satz: Sei (M,g) Riemannsche Mfk, $p \in M$. Seien $X_p, Y_p, Z_p \in T_pM$ mit X_p, Y_p linear unabhängig. Für $t>0$ sei

$Z_{p,t}$ = der Vektor in T_pM, den man aus Z_p durch Parallelverschiebung entlang dem Rand des von tX_p, tY_p aufgespannten „Parallelogramms" P_t erhält.

Dann ist
$$R(X_p, Y_p) Z_p = \lim_{t \to 0} \frac{Z_p - Z_{p,t}}{t^2}$$

„Parallelogramm" bedeutet: Wähle Koordinaten mit $x(p) = 0$, $X_p = \partial_1$, $Y_p = \partial_2$. Dann ist P_t das Bild (unter der Karte) des Quadrats



Das heißt:

Der Krümmungstensor misst, wie sehr ein Vektor unter Parallelverschiebung entlang einem geschlossenen Weg bei Rückkehr zum Ausgangspunkt „verändert" wurde.

(Diese Änderung heißt auch Holonomie von g)

(vgl. der Basis von Seite 224: Falls $R \equiv 0$, so gibt es eine Basis von Vektorfeldern, die entlang beliebiger Kurven parallel sind; insbesondere kommt man bei Rückkehr zu p wieder bei demselben Vektor E_p an!)

Dabei geben X_p, Y_p an, in welcher Ebene dieser geschlossene Weg (nahe p) gewählt sein soll.

Bem: Offenbar ist $R(X,Y) = -R(Y,X)$ (nach Def. von R)

Daraus folgt $R(X_p, Y_p) = 0$, falls X_p, Y_p linear abhängig sind.

Weitere Krümmungsbegriffe

Der Riemannsche Krümmungstensor ist manchmal etwas unhandlich und schwer zu überblicken.(*) Man kann sich auf verschiedene Arten behelfen:

- Man fasse $R(X_p, Y_p)$ als lineare Abbildung $T_pM \to T_pM$ auf („infinitesimale Holonomie", vgl. S. 229–233)

- Betrachte die Schnittkrümmung, diese enthält dieselbe Information wie R, ist aber etwas anschaulicher

- Man nimmt Mittelwerte (genauer: Spuren) über „Teile" von R und erhält somit
  - Ric (Ricci-Tensor, ein $(0,2)$-Tensor)
  - S (Skalarkrümmung, eine Funktion auf M)

Ric enthält weniger Information als R, S noch weniger

(*) Michael Gromov, einer der berühmtesten Geometer, schrieb 1991: „The curvature tensor is a little monster of multilinear algebra whose full geometric meaning remains obscure."
(Artikel: „Sign and geometric meaning of curvature.")

Schnittkrümmung:

Erinnerung: Für Flächen $M\subset\mathbb{R}^3$ ist $K = \dfrac{R_{1212}}{\det(g_{ij})}$,
(Seite 67)

wobei $R_{klij} = \sum_m g_{km} R^m_{lij}$

d.h. R_{klij} sind die Komponenten des $(0,4)$-Tensors

$$\underset{i}{(X},\underset{j}{Y},\underset{l}{Z},\underset{k}{W)} \longmapsto g(R(X,Y)Z,W)$$

Insbesondere, falls X_p, Y_p ON-Basis von T_pM ist,
so
$$K = g(R(X,Y)Y,X) \quad \text{(alles bei } p) \qquad (*)$$

(denn: man kann Koord. wählen mit $X = \partial_1,\ Y = \partial_2$)
bei p.

(falls X_p, Y_p beliebig sind – nicht notwendig orthonormal,
so ist für die Koordinaten
$$g_{11} = g(\partial_1,\partial_1) = g(X,X)$$
$$g_{12} = g(X,Y)$$
$$g_{22} = g(Y,Y).$$

also
$$g(R(X,Y)Y,X) = K\cdot\left(g(X,X)g(Y,Y)-g(X,Y)^2\right) \qquad (*')$$

(dies gilt für jedes p, also allgemein)

Dies gilt für Flächen $M \subset \mathbb{R}^3$.

Für eine abstrakte Riemannsche Mgfk. nehmen wir daher (*) (oder äquivalent (*')), um die Gauß Krümmung K zu <u>definieren</u>.

<u>Bem</u>: Die Definition hängt scheinbar von der Wahl von X, Y ab, in Wirklichkeit aber nicht (Übung).

Analog in höheren Dimensionen:

<u>**Def**</u>: (M, g) Riemannsche Mgfk., $p \in M$.

Für jeden 2-dimensionalen Unterraum $\sigma \subset T_pM$

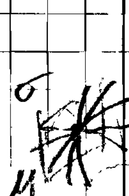
sei
$$K_\sigma = g(R(X,Y)Y, X)$$

für eine Orthonormalbasis (X, Y) von σ.

K_σ heißt <u>Schnittkrümmung</u> von g bei p bzgl. σ.

<u>Bem</u>: Unabhängig von der Wahl von X, Y

<u>Bem</u>: Sei M_σ = Vereinigung der Geodäten (der Länge $< \varepsilon$), die von p in Richtungen tangential an σ starten.



Dann ist M_σ Fläche mit Gauß Krümmung K_σ bei p.

<u>Satz</u>: R ist durch $\{K_\sigma\}$ für alle σ
eindeutig bestimmt.

Ricci

Def: $Ric(X,Y) = \sum_i g(R(e_i, X)Y, e_i)$

(e_i ON-Basis)

Ric heißt Ricci-Tensor

Fakt: Ric ist symmetrischer $(0,2)$-Tensor
d.h. $Ric(X,Y) = Ric(Y,X)$.

Skalarkrümmung:

Def: $S = \sum_j Ric(e_j, e_j)$
Skalarkrümmung

Bedeutung: Sei $\|X\| = 1$

$Ric(X,X)_p$ = Summe der Schnittkrümmungen von $n-1$) paarweise orthogonalen Ebenen, die X enthalten

Formel $g(R(e_i, X)X, e_i) = S_{span\langle e_i, X\rangle}$ für e_i ONB, $e_n = X$.

$= (n-1) \cdot$ Mittelwert der Schnittkrümmung über alle Ebenen $\sigma \subset T_pM$, die X enthalten.

($Ric(X,X)_p$ mit $\|X\| = 1$ bestimmt Ric vollständig, da Ric bilinear + symmetrisch ist)

$S = n(n-1)$ Mittelwert der Schnittkrümmungen aller Ebenen $\sigma \subset T_pM$