IV. Die innere Geometrie von Flächen

IV.1 Fragestellung; Isometrien

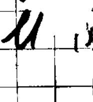
Wir stellen uns „Flachländer" vor, d.h. Wesen, die innerhalb einer Fläche leben und selbst zweidimensional sind und nicht aus der Fläche „herausschauen" können. Sie kennen also keine dritte Dimension (so wenig wie wir eine vierte kennen).

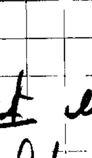
<u>Frage</u>: Kann ein Flachländer entscheiden, in welcher Fläche er lebt?
Kann er z.B. unterscheiden, ob er in der Ebene oder auf der Sphäre lebt?

<u>Annahme</u>: Zur Entscheidung dieser Frage darf der Flachländer nur <u>Längen- und Winkelmessungen</u> in seiner Fläche machen.

<u>Beobachtung</u>: Sind M, M' Flächen und ist $F: M \to M'$ eine Abbildung, die Längen und Winkel erhält (d.h. z.B. Abstand von $p, q \in M$ ist gleich Abstand von $F(p), F(q)$ in M')

so kann ein Flachländer <u>nicht</u> entscheiden, ob er in M oder in M' lebt!

<u>Bsp.</u>: M = ein Blatt Papier  (Teil der Ebene)

M' = dasselbe Blatt, verbogen  (Teil eines Zylinders)

Da Papier nicht elastisch ist, bleiben beim Verbiegen Abstände, Winkel erhalten.

Der Flachländer kann also M, M' nicht unterscheiden!

Wir formalisieren diese Ideen mathematisch:

Def: Seien $M \subset \mathbb{R}^N$, $M' \subset \mathbb{R}^{N'}$ Untermannigfaltigkeiten. Eine glatte Abbildung

$$F : M \to M'$$

heißt Isometrie, falls F bijektiv ist und für alle $p \in M$ und $X, Y \in T_pM$ gilt

(Iso) $$g_p(X, Y) = g'_{F(p)}(dF_{|p}(X), dF_{|p}(Y))$$

Hierbei sind g, g' die ersten Fundamentalformen von M bzw. M'.

Warum bedeutet (Iso), dass F Längen + Winkel erhält?

Beobachtung: Für $X = Y$ sagt (Iso): $\|X\| = \|dF_{|p}(X)\|$

Nun ist $dF_{|p}(X)$ der Vektor in $T_{F(p)}M'$, der X bzgl. der Abbildung F entspricht. Also

(Iso) $\Rightarrow$ F erhält Längen von Tangentialvektoren

(Zur Begründung von "⇐" siehe unten)

Konkreter: Wir drücken zunächst die Länge einer Kurve

$$\gamma : [a,b] \to M$$

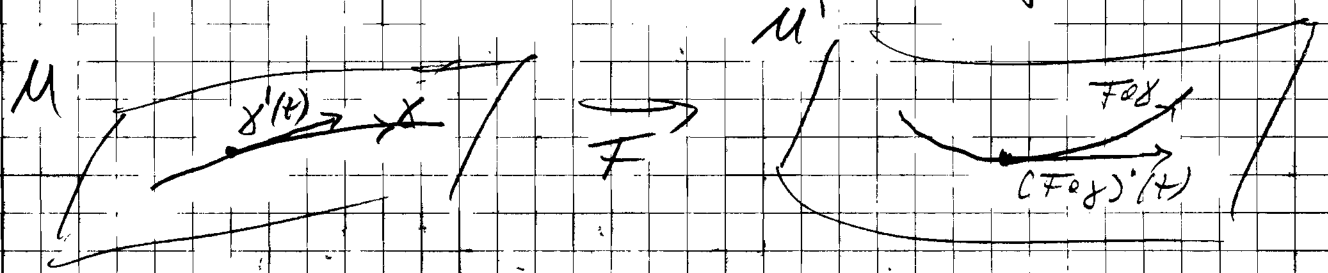
mittels g aus: Wegen $\|\dot\gamma(t)\|^2 = \langle \dot\gamma(t), \dot\gamma(t) \rangle$

$$= g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))$$

ist

$$L[\gamma] = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\,dt = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))}\,dt .$$

Wir betrachten nun die Bildkurve $F\circ\gamma$:



Nach der Kettenregel ist $(F\circ\gamma)^\cdot(t) = dF_{|\gamma(t)}(\dot\gamma(t))$, also

$$L[F\circ\gamma] = \int_a^b \sqrt{g'_{(F\circ\gamma)(t)}\left(dF_{|\gamma(t)}(\dot\gamma(t)), dF_{|\gamma(t)}(\dot\gamma(t))\right)}\,dt$$

Man sieht: Aus (Iso) folgt $L[\gamma] = L[F\circ\gamma]$

(Wende (Iso) mit $p = \gamma(t)$, $X = Y = \dot\gamma(t)$ an und integriere über t)

Umgekehrt gilt: Falls $L[\gamma] = L[F\circ\gamma]$ für alle Kurven γ in M gilt, so folgt (Iso) für alle p, X, Y.

Beweis: Sei $p \in M$, $X \in T_p M$.
Wähle $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = p$
$\dot\gamma(0) = X$.

Für $T \in (0, \varepsilon)$ betrachte die Teilkurve $\gamma_{|[0,T]}$.
Diese hat Länge

$$L[\gamma_{|[0,T]}] = \int_0^T \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))}\, dt,$$

und es folgt

$$\frac{d}{dT}_{|T=0} L[\gamma_{|[0,T]}] = \sqrt{g_p(X, X)}$$

Analog folgt für das Bild unter F

$$\frac{d}{dT}_{|T=0} L[(F\circ\gamma)_{|[0,T]}] = \sqrt{g'_{F(p)}(dF_{|p}(X), dF_{|p}(X))}$$

Nach Annahme ist $L[\gamma_{|[0,T]}] = L[(F\circ\gamma)_{|[0,T]}]$
für alle T, also sind die beiden Ableitungen
(*) gleich, und daraus folgt (Iso) für $X = Y$.
Da eine quadratische Form die zugeordnete symmetrische Bilinearform eindeutig festlegt, folgt
(Iso) für alle X, Y

(*) Anders gesagt: Da die Gleichheit von Längen auch für beliebige Teilstrecken von γ gilt, sind auch beliebige Teilintegrale $\int_{t_1}^{t_2}$ von $L[\gamma]$, $L[F\circ\gamma]$ auf S. 37 gleich, also sind die Integranden für jedes t gleich

Zusammenfassung:

Sei $F: M \to M'$ glatt, bijektiv.

Dann gilt (Iso) $\forall p \in M$, $X, Y \in T_pM$

genau dann, wenn F Kurvenlängen erhält, d.h.

wenn
$$L[\gamma] = L[F\circ\gamma]$$

$\forall$ Kurven γ in M gilt.

Bem.:

1) Damit folgt daraus, dass F Längen erhält, auch automatisch, dass F Winkel erhält!

Denn der Winkel zweier Kurven, die sich in p schneiden und dort die Tangentialvektoren X, Y $(\neq 0)$ haben, ist
$$\arccos \frac{g_p(X,Y)}{\|X\|\cdot\|Y\|} \qquad \left(\|X\| = \sqrt{g_p(X,X)},\ \|Y\| = \sqrt{g_p(Y,Y)}\right)$$

und der Winkel der Bildkurven ist durch die analoge Formel mit

$F(p)$ statt p

$dF_p(X)$ statt X

$dF_p(Y)$ statt Y

gegeben.

2) Eine Isometrie ist automatisch ein Diffeomorphismus.
Denn (Iso) impliziert, dass dF_p injektiv ist für alle p, also bijektiv (da $\dim M = \dim M'$), daher ist F^{-1} glatt nach dem Satz über die Umkehrfunktion.

3) Man nennt (Iso) die *infinitesimale* Version von Längen/Winkel-Erhaltung.

4) M wird zu einem *metrischen Raum*, wenn man den Abstand von $p, q \in M$ durch

$$d(p,q) := \inf_{\gamma} L[\gamma]$$

(über alle Kurven γ mit Anfangspunkt p und Endpunkt q) definiert.
(Damit so eine Kurve γ überhaupt existiert, muss man hier annehmen, dass M wegzusammenhängend ist.)

Dann gilt: $F: M \to M'$ ist Isometrie im oben definierten Sinn

$\Leftrightarrow$ $F: (M,d) \to (M',d')$ ist Isometrie

im Sinn metrischer Räume

(d.h. $d'(F(p), F(q)) = d(p,q)$ $\forall p,q \in M$)

(einfache Übung; schwieriger: das gilt sogar, wenn man die Glattheit von F nicht voraussetzt; d.h.: $d(F(p), F(q)) = F(p,q)$ $\forall p,q$ impliziert, dass F glatt ist.)

5) Falls eine Isometrie $F: M \to M'$ existiert, so heißen M, M' *isometrisch*.

Der Begriff „Innere Geometrie":

„Definition": Eine Größe, die (Unter-) Mannigfaltigkeiten zugeordnet ist, heißt eine <u>Größe der inneren Geometrie</u>, falls sie unter Isometrien erhalten bleibt

„Größen" können hier Funktionen auf M oder auf $M \times M$ oder auch kompliziertere Objekte sein.
Was unter „erhalten bleiben" zu verstehen ist, ist für jede Art von Größe anzugeben, daher ist dies keine echte Definition.

<u>Bsp</u>: Größen der inneren Geometrie sind:

- Die Länge von Kurven (d.h. $L[\gamma] = L[F \circ \gamma]$ für Isometrien F)
- Der Abstand von Punkten (d.h. $d(F(p), F(q)) = d(p,q)$)
- Der Flächeninhalt (d.h. $\mathrm{vol}_n(A) = \mathrm{vol}_n(F(A))$)

<u>Beweis</u>: $\mathrm{vol}_n(A) = \int_{\tilde{A}} \sqrt{\det(g_{ij})}\, du$,

falls $A \subset$ ein Kartengebiet U und $\tilde{A} = \varphi^{-1}(A)$ für die Karte $\varphi: \tilde{U} \to U$

Dann ist $F \circ \varphi: \tilde{U} \to F(U)$ Karte für M'

und
$$g'_{ij}(u) = g'\left(\frac{\partial(F\circ\varphi)}{\partial u^i}, \frac{\partial(F\circ\varphi)}{\partial u^j}\right)$$
$$\overset{(\mathrm{Iso})}{=} g\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u^i}, \frac{\partial\varphi}{\partial u^j}\right) = g_{ij}(u),$$

da $\frac{\partial(F\circ\varphi)}{\partial u^i}(u) = dF_{|\varphi(u)}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u^i}(u)\right)$

nach der Kettenregel gilt.

Wegen $\mathrm{vol}_n(F(A)) = \int_{\tilde{A}} \sqrt{\det g'_{ij}(u)}\, du$

folgt $\mathrm{vol}_n(A) = \mathrm{vol}_n(F(A))$.

Für allgemeine (messbare) A folgt die Behauptung durch Zerlegung in Teile, die jeweils in einem Kartengebiet liegen.

<u>Isometrien und Größen der inneren Geometrie in Koordinaten</u>

Sei $F: M \to M'$ glatt, $\varphi: \tilde{U} \to U \subset M$ lokale Karte.

Ist F ein Diffeomorphismus, so ist $\varphi' = F\circ\varphi: \tilde{U} \to U' = F(U) \subset M'$ lokale Karte.

Sei $(g_{ij})_{ij}$ die Matrix von g bzgl. φ
und $(g'_{ij})_{ij}$ die Matrix von g' bzgl. φ'

Dann gilt: $F_{|U}$ ist Isometrie

$\Leftrightarrow \quad g_{ij}(u) = g'_{ij}(u) \quad \forall\, i,j = 1,\dots,n,\ u \in \tilde{U}$.

(Beweis: "$\Rightarrow$" siehe oben, "$\Leftarrow$" Übung!)

Daraus folgt:

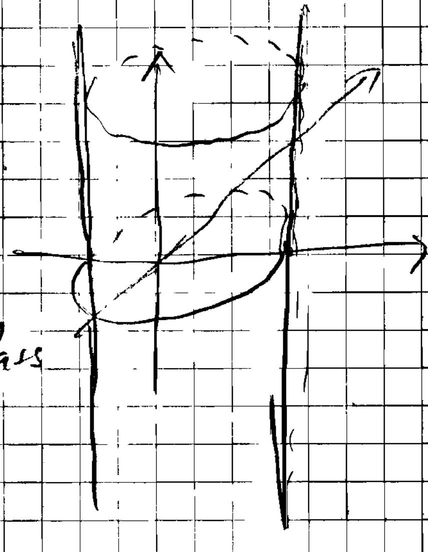
Eine Größe, die sich in lokalen Koordinaten **allein mittels der g_{ij}** (*) ausdrücken lässt (also z.B. ohne Verwendung von $\frac{\partial\varphi}{\partial u^i}$, N), ist eine Größe der inneren Geometrie.

(*) und ihrer Ableitungen, z.B. $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}$

Beispiel: Flächeninhalt

(Erfahrungsgemäß gilt auch die Umkehrung: Jede innere Größe lässt sich allein mittels der g_{ij} ausdrücken. Das ist schwer zu präzisieren, da wir nicht gesagt haben, was „Größe" und „ausdrücken" bedeuten.)

Beispiel einer Isometrie:



$\varphi(\vartheta, z) = (\cos\vartheta, \sin\vartheta, z)$

$\varphi: (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to U \subset$ Zylinder

Wir haben bzgl. dieser Karte berechnet, dass

$$(g_{ij}(\vartheta, z))_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall \vartheta, z$$

gilt. Nun ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ auch die Matrix des Euklidischen Skalarprodukts auf $(0, 2\pi) \times \mathbb{R}$. Also ist φ eine Isometrie.

(Das ist das Aufrollen eines Papiers).

Daraus können wir sehen:

Die Hauptkrümmungen κ_1, κ_2 sowie die mittlere Krümmung H sind keine Größen der inneren Geometrie.

Denn für den Zylinder ist $\kappa_1 = -1, \kappa_2 = 0$, $H = -1/2$, für die Ebene ist $\kappa_1 = \kappa_2 = H = 0$.

Dies sind „externe" Größen, die Flachländer nicht erkennen können.

Beachte aber, dass $K = 0$ für Zylinder und Ebene ist!

Def: M heißt flach, wenn es lokal isometrisch zu $\mathbb{R}^n$ ist

(d.h. jeder Punkt hat eine Umgebung U, die isometrisch zu einer offenen Menge $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ ist).

Bsp: Der Zylinder ist lokal isometrisch zu $\mathbb{R}^2$, also flach.

Wie zeigt man, dass zwei gegebene Flächen isometrisch sind?

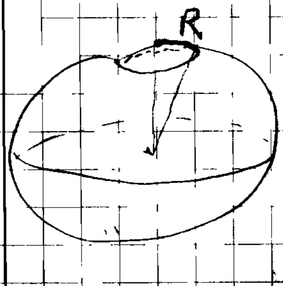
– Durch Angeben einer Isometrie

Wie zeigt man, dass zwei gegebene Flächen nicht isometrisch sind?

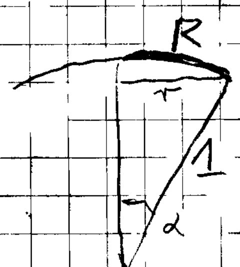
? ? ? $\exists$ keine allgemeine Antwort.

Beispiel:

Die Sphäre ist nirgends flach, d.h. es gibt keine offene Menge $U \subset S^2$, die isometrisch zu einem $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^2$ ist.



Beweis: Sei $p \in U$. Berechne den Umfang eines Kreises mit Radius $R > 0$ (innerhalb der Sphäre gemessen!)



Es ist $R = \alpha$ (Bogenmaß!)

und $r = \sin \alpha$

Also $r = \sin R = R - \frac{R^3}{6} + \ldots$

$\Rightarrow$ Der Kreis hat Umfang $2\pi r = \underbrace{2\pi R}_{= 2\pi \sin R} - \frac{2\pi}{6} R^3 + \ldots$

Wäre U flach, so müsste dieselbe Formel wie in $\mathbb{R}^2$ gelten (da alle Längen unter einer Isometrie erhalten bleiben), d.h. der Umfang müsste

$$2\pi R$$

sein. Wegen $R > \sin R$ $(R > 0)$ ist also U nicht flach!

Bem: $K = 1$ für S^2, $K = 0$ für $\mathbb{R}^2$ (Gauß-Krümmung).

<u>Frage</u>: Wie sieht man einer Fläche M an, ob sie flach ist?

(sagen wir, sie ist in lokalen Koordinaten gegeben)

<u>Allgemeines Prinzip der Mathematik</u>:

Um solche Fragen zu beantworten, sucht man nach <u>Invarianten</u>, d.h. Größen, die M zugeordnet sind und unter den relevanten Abbildungen (hier: Isometrien) erhalten bleiben.

Berechnet man die Invariante für M und für M' und sind diese verschieden (bzw. nicht zur Deckung zu bringen), so folgt, dass M, M' nicht isometrisch sein können.

(Beispiel oben: Umfang eines Kreises als Funktion des Radius)

IV. 2 Vektorfelder und kovariante Ableitung

Unser Ziel: Zeige, dass die Gauss-Krümmung eine innere Größe ist.

Das ist nicht offensichtlich, da sie mittels der Krümmung von Kurven bzw. mittels der Flächennormalen (beides extrinsische Größen) definiert ist.
Wir werden aber eine Formel für K finden, die nur die g_{ij} und ihre Ableitungen enthält!

Zur Vorbereitung müssen wir uns darüber Gedanken machen, wie man Vektorfelder ableitet.

Def: Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ Untermannigfaltigkeit.
Ein Vektorfeld auf M ist eine glatte Abbildung X, die jedem $p \in M$ ein $X_p \in T_pM$ zuordnet.

Beachte: X_p soll tangential an M sein $\forall p$.

→ Problem: Der „Zielraum" T_pM variiert mit p.

Was heißt glatt?
- extrinsische Definition: Wegen $T_pM \subset \mathbb{R}^N$ kann man X als Abbildung $M \to \mathbb{R}^N$ auffassen. Für solche Abbildungen haben wir Glattheit definiert.

- intrinsische Definition:

Sei $\varphi : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow U \subset M$ lokale Karte.

Dann kann man

$$X_{\varphi(u)} = \sum_{i=1}^{n} X^i(u) \frac{\partial \varphi}{\partial u^i}(u)$$

schreiben.

X heißt glatt $:\Leftrightarrow$ die Koeffizientenfunktionen

$$X^i : \tilde{U} \longrightarrow \mathbb{R}$$

sind glatt, für jede lokale Karte einer Überdeckung.

Übung: Die beiden Definitionen sind äquivalent.

<u>Bezeichnung</u>: $\mathfrak{X}(M) = \{\text{Vektorfelder auf } M\}$

$C^\infty(M) = \{\text{glatte Funktionen auf } M\}$

<u>Def</u>: Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$.

Dann ist $Xf \in C^\infty(M)$ definiert durch

$$(Xf)(p) = df|_p(X_p)$$

= Richtungsableitung von f in Richtung p.

Bloß eine neue Notation für ein altes Konzept!

Beachte: $(Xf)(p)$ hängt ab von:

- bzgl. X: dem Vektor X_p
- bzgl. f: den Ableitungen von f bei p

(also: Um $(Xf)(p)$ zu kennen, genügt es nicht, den Wert $f(p)$ zu kennen.
Andererseits genügt es, den Wert X_p zu kennen
– und nicht zB Ableitungen von p)

Lemma (Rechenregeln für Xf):
Seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g, h \in C^\infty(M)$

1) $(X+Y)f = Xf + Yf$
$(hX)f = h \cdot Xf$

2) $X(f+g) = Xf + Xg$

$X(cf) = c \cdot Xf \quad (c \in \mathbb{C})$

3) $X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$ (Leibniz- oder Produktregel)

In Worten: Die Abbildung $(X, f) \mapsto Xf$
$\mathfrak{X}(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$

ist

1) $C^\infty(M)$-linear bezüglich X
2) $\mathbb{C}$-linear (aber nicht $C^\infty(M)$-linear!) bzgl. f

2)+3) Eine Derivation bzgl. f.

Hierbei ist hX das Vektorfeld $(hX)_p = h(p) \cdot X(p)$

(d.h. ändere die Länge von X_p, variabel mit p)

Beweis: 1), 2) klar nach Definition, Eigenschaften von d. (z.B. $[(hX)f](p) = df_{|p}((hX)_p)$

$= df_{|p}(h(p)X_p)$

$= h(p)\, df_{|p}(X_p)$

$= h(p)\, [Xf](p)$

$= [h \cdot (Xf)](p)$)

3) Zunächst schreiben wir Xf in lokalen Koordinaten:

$\varphi : \tilde{U} \to U$ lokale Karte, $X = \sum X^i \frac{\partial \varphi}{\partial u^i}$

(d.h. $X_{\varphi(u)} = \sum X^i(u) \frac{\partial \varphi}{\partial u^i}(u)$)

und $\tilde{f} = f \circ \varphi$ (= „f in lokalen Koordinaten")

Dann gilt

$$\boxed{(Xf)(p) = \sum_i X^i(u) \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \tilde{f}\right)(u), \quad p = \varphi(u)}$$

Beweis: Wegen 1) genügt es, dies für $X = \frac{\partial \varphi}{\partial u^i}$ zu zeigen. Es gilt

$$df_{|\varphi(u)}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u^i}(u)\right) \underset{\text{Kettenregel}}{=} \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial u^i}(u) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^i}(u),$$

was zu zeigen war. ☒

3) folgt nun aus $\frac{\partial}{\partial u^i}(\tilde{f}\cdot\tilde{g}) = \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\tilde{f}\right)\tilde{g} + \tilde{f}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\tilde{g}\right)$

Jetzt kommt etwas Neues!

Wie leitet man ein Vektorfeld ab?

Im $\mathbb{R}^N$ ist das einfach: Leite die Komponenten ab!

Def: Seien $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^N)$.

Die Ableitung von Y in Richtung X ist definiert durch

$$\left(\nabla^{\mathbb{R}^N}_X Y\right)_p := dY|_p(X_p)$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Y_{\gamma(t)}$$

falls $\gamma: I \to \mathbb{R}^N$ eine Kurve mit $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = X_p$ ist.

$\nabla^{\mathbb{R}^N}$ ordnet also zwei Vektorfeldern ein Vektorfeld zu.

Zur Berechnung: Schreibe $Y = (Y^1, \ldots, Y^N) = \sum_i Y^i e_i$,

dann $\nabla^{\mathbb{R}^N}_X Y = \sum X(Y^i) e_i$

$= (X(Y^1), \ldots, X(Y^N))$,

wobei $X(Y^i)$ die Richtungsableitung der Funktion Y^i in Richtung X ist.

Rechenregeln für $\nabla^{\mathbb{R}^N}$ (wird als ∇ geschrieben):

Für $X, \ldots \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^N)$ und $h \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ gilt:

1) a) $\nabla_{X_1+X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$

b) $\nabla_{hX} Y = h \cdot \nabla_X Y$

2) a) $\nabla_X (Y_1+Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$

b) $\nabla_X (h \cdot Y) = (Xh) Y + h \cdot \nabla_X Y$

Beachte den Unterschied von 1b) zu 2b):
bzgl. X kann man Funktionen „herausziehen"
bzgl. Y nicht (man muss einen Term addieren, der h ableitet).

2b) hat das alte Muster:
Ableitung von $h \cdot Y$ = (Ableitung von h) $\cdot\, Y$ + h (Ableitung von Y),
man muss nur an jeder Stelle die richtige Art von Ableitung nehmen.

Beweis: 1), 2a) wie für Funktionen.

2b) $$[\nabla_X (hY)]_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} h(\gamma(t)) \cdot Y_{\gamma(t)}$$

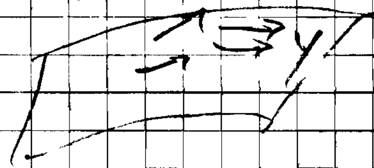
$$= \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} h(\gamma(t))\right) \cdot Y_{\gamma(0)} + h(\gamma(0)) \cdot \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Y_{\gamma(t)}$$

$$= (Xh)(p)\, Y_p + h(p)\, (\nabla_X Y)_p$$

Wir wollen nun Vektorfelder auf einer Mgfk. ableiten.

Seien also $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Wir können wieder

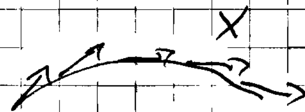


$$\left(\nabla_X^{\mathbb{R}^N} Y\right)_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Y(\gamma(t))$$

bilden, wenn wir γ innerhalb M wählen (das geht, weil $X_p \in T_pM$ ist).

Problem: Das ist nicht tangential an M

(z.B. $X = Y =$ Einheitstangentialvektor an eine Kurve,

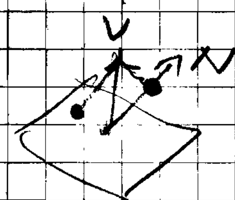


dann $\nabla_X^{\mathbb{R}^N} Y = \dot{T}$ = Normal zur Kurve!)

Lösung: Wir nehmen den tangentialen Teil.

Zerlegung eines Vektors v in Tangential-, Normalteil:

$$v = \underbrace{\langle v, N\rangle N}_{\text{Normal}} + \underbrace{(v - \langle v, N\rangle N)}_{\text{Tangential}}$$



Def: Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ Untermannigfaltigkeit.
Seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.
Die kovariante Ableitung von Y in Richtung X ist das Vektorfeld $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$ definiert durch

$$(\nabla_X Y)_p = \text{tangentialer Teil von } \nabla_X^{\mathbb{R}^N} Y$$
$$= \nabla_X^{\mathbb{R}^N} Y - \langle \nabla_X^{\mathbb{R}^N} Y, N_p\rangle \cdot N_p$$

Beachte: Y wird in Richtung X abgeleitet.
Also: Um $(\nabla_X Y)_p$ zu bestimmen, braucht man X nur an der Stelle p (also X_p), aber Y auch nahe p (um es ableiten zu können)

Man schreibt daher auch $(\nabla_X Y)_p = \nabla_{X_p} Y$.

Lemma: a) Für ∇ gelten dieselben Rechenregeln wie für $\nabla^{\mathbb{R}^N}$.

b) ∇ ist mit g „verträglich", d.h. $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$X(\underbrace{g(Y,Z)}_{\text{Funktion auf } M!}) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

Beweis: a) Einfache Rechnung
b) Auf $\mathbb{R}^N$ (mit $\nabla^{\mathbb{R}^N}$) gilt das (wie wir schon oft verwendet haben).
Damit gilt es für ∇, da der Korrekturterm ein Vielfaches von N ist und
$g(N, Z) = 0 = g(Y, N)$ ∎

Wie rechnet man mit ∇ in lokalen Koordinaten?

Man wendet es auf die Basisvektoren an und stellt das Resultat in der Basis dar!

<u>Def</u>: Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ Untermgfk., $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ die kovariante Ableitung.
Sei $\varphi : \hat{U} \to U \subset M$ eine lokale Karte.
Die <u>Christoffel-Symbole</u> von M (bzw. ∇) bzgl. φ sind die Funktionen

$$\Gamma_{ij}^k : \hat{U} \to \mathbb{R}$$

definiert durch

$$\boxed{\nabla_{\frac{\partial\varphi}{\partial u^i}} \frac{\partial \varphi}{\partial u^j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi}{\partial u^k}}$$

Um dies genauer zu verstehen, betrachten wir zunächst

$\nabla^{\mathbb{R}^N}_{\frac{\partial\varphi}{\partial u^i}} Y$ für ein Vektorfeld Y auf M.

Wie bei Funktionen schreiben wir dies mittels

$\hat{Y} = Y \circ \varphi$ (d.h. $\hat{Y}(u) = Y(\varphi(u))$) als

$$\boxed{\nabla^{\mathbb{R}^N}_{\frac{\partial\varphi}{\partial u^i}} Y = \frac{\partial \hat{Y}}{\partial u^i}}$$

(denn $LS = dY\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u^i}\right) = \frac{\partial (Y\circ\varphi)}{\partial u^i}$)

Für $Y = \frac{\partial\varphi}{\partial u^j}$ (welches ja genauer $\tilde{Y} = \frac{\partial\varphi}{\partial u^j}$

$Y_p = \frac{\partial\varphi}{\partial u^j}(\varphi^{-1}(p))$

geschrieben werden sollte)

folgt

$$\nabla^{\mathbb{R}^N}_{\frac{\partial\varphi}{\partial u^i}} \frac{\partial\varphi}{\partial u^j} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^i \partial u^j}$$

Also

$$\nabla_{\frac{\partial\varphi}{\partial u^i}} \frac{\partial\varphi}{\partial u^j} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^i \partial u^j} - \left\langle \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^i \partial u^j}, N \right\rangle N$$

$$= \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^i \partial u^j} - h_{ij} N$$

(h_{ij} = II. Fundamentalform in Koordinaten!)

Folgerung:

$$\boxed{\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}}$$

Wir haben ∇ mittels $\nabla^{\mathbb{R}^N}$, N, also extrinsischer Größen definiert, daher ist folgendes überraschend:

<u>Satz:</u> Die kovariante Ableitung ∇ ist eine Größe der inneren Geometrie.
Genauer gilt:

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_l g^{kl}\, \Gamma_{ij,l}$$

wobei $$\Gamma_{ij,l} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right)$$

<u>Beweis:</u> a) Sei $\Gamma_{ij,k} = g\left(\nabla_{\frac{\partial\varphi}{\partial u^i}} \frac{\partial\varphi}{\partial u^j}, \frac{\partial\varphi}{\partial u^k}\right)$

Dann gilt

$$\Gamma_{ij,k} = g\left(\sum \Gamma_{ij}^l \frac{\partial\varphi}{\partial u^l}, \frac{\partial\varphi}{\partial u^k}\right)$$

$$(*) \qquad = \sum_l g_{kl}\, \Gamma_{ij}^l$$

Genau wie bei der Beziehung der h_{ij} zu den w_{ij} folgt daraus

$$(**) \qquad \Gamma_{ij}^k = \sum g^{kl}\, \Gamma_{ij,l}$$

(Denn: $(*)$ in Matrixschreibweise, für festes i,j, mit $a_k := \Gamma_{ij,k}$, $b^k = \Gamma_{ij}^k$, $g = (g_{ij})$, $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$a = g\, b \quad \Rightarrow \quad b = g^{-1} a$, d.h. $(**)$)

b) Wir wollen nun $\Gamma_{ij,l}$ durch die g's ausdrücken.

Verwende, dass ∇ mit g verträglich ist:

$$\frac{\partial}{\partial u^k} g_{ij} = \frac{\partial}{\partial u^k} g\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u^i}, \frac{\partial\varphi}{\partial u^j}\right)$$

$$= g\left(\nabla_{\frac{\partial\varphi}{\partial u^k}} \frac{\partial\varphi}{\partial u^i}, \frac{\partial\varphi}{\partial u^j}\right) + g\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u^i}, \nabla_{\frac{\partial\varphi}{\partial u^k}} \frac{\partial\varphi}{\partial u^j}\right)$$

$$= \Gamma_{ki,j} + \Gamma_{kj,i} \qquad (1)$$

Permutiere zyklisch:

$$\frac{\partial}{\partial u^i} g_{jk} = \Gamma_{ij,k} + \Gamma_{ik,j} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial u^j} g_{ki} = \Gamma_{jk,i} + \Gamma_{ji,k} \qquad (3)$$

Nimm $(2) + (3) - (1)$, verwende $\Gamma_{kj,i} = \Gamma_{jk,i}$ etc.

$$\Rightarrow \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = 2\,\Gamma_{ij,k}$$

Das ist die Behauptung! (wegen $g_{ki} = g_{ik}$)

□