Bemerkung zu schrecklichen Formeln wie der für Γ_{ij}^{k}:

Es lohnt sich nicht, diese auswendig zu lernen

Wichtig: • ∇ ist durch g bestimmt

• Γ ist durch eine Kombination erster Ableitungen von g gegeben.

Frage: Gibt es eine geometrische Art, $\nabla_X Y$ intrinsisch zu beschreiben?

Antwort: Ja, werden wir später sehen.

IV.3 Die Geburt des Riemannschen Krümmungstensors
Das Theorema egregium

Die folgenden Rechnungen sind noch scheußlicher als die vorhergehenden.
Sie liegen aber der ganzen „höheren" Differentialgeometrie zugrunde.
Später werden wir Wege kennenlernen, den hier vorkommenden Wust an Indizes zu vermeiden und die Rechnungen einsichtiger zu machen.

Vorbemerkung: Integrabilitätsbedingungen (Analysis III):

Wann ist ein Vektorfeld auf $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Gradientenfeld?

D.h., gegeben $X = (X^1, \dots, X^n) : U \to \mathbb{R}^n$, wann existiert $\varphi : U \to \mathbb{R}$ mit $X = \nabla\varphi$, d.h.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial u^1}(u) &= X^1(u) \\ &\vdots \\ \frac{\partial\varphi}{\partial u^n}(u) &= X^n(u) \end{aligned}\right\} \forall u \in U \qquad ?$$

Ein solches φ muss $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u^i \partial u^j} = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u^j \partial u^i}$ $\forall i,j$ erfüllen,

also folgt aus der Existenz von φ als notwendige Bedingung:

$$\frac{\partial X_j}{\partial u^i} = \frac{\partial X_i}{\partial u^j} \quad \forall i,j$$

(Diese Bedingung ist auch hinreichend, falls
U einfach zusammenhängend, zB eine Kugel, ist.)

Wir stellen nun folgende Frage:

Angenommen, wir haben Funktionen

$$g_{ij} : U \to \mathbb{R} \qquad (U \subset \mathbb{R}^n)$$

$$h_{ij} : U \to \mathbb{R}$$

gegeben mit $g_{ij} = g_{ji}$, $h_{ij} = h_{ji}$, $(g_{ij})_{ij}$ positiv definit.

Gibt es dann eine lokale Karte, d.h. ein

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^3,$$

so dass (evtl. nach Verkleinerung von U)
g_{ij}, h_{ij} gerade die 1. + 2. Fundamentalform
bzgl. dieser Karte sind?
Oder gibt es φ nur unter gewissen Bedingungen
an die g_{ij}, h_{ij}?

Wir brauchen zunächst Beziehungen zwischen φ, den g_{ij} und den h_{ij}.

Satz: Wenn φ, (g_{ij}), (h_{ij}) wie oben sind, gilt $\forall i,j,k$

1) $$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^i \partial u^j} = \sum_\alpha \Gamma_{ij}^\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial u^\alpha} + h_{ij} N$$

2) $$\frac{\partial N}{\partial u^k} = - \sum_{\beta,\gamma} h_{k\beta}\, g^{\beta\gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial u^\gamma}$$

Beweis: 1) ist die Definition von ∇ und II

wegen $\nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial u^i}} \frac{\partial \varphi}{\partial u^j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^i \partial u^j}$

2) folgt aus $\frac{\partial N}{\partial u^k} = -\sum_\gamma W_k^\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial u^\gamma}$

$\left(= W\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u^k}\right)\right)$

mittels $W_k^\gamma = \sum_\beta h_{k\beta}\, g^{\beta\gamma}$

■

Gegeben (g_{ij}), (h_{ij}), ist dies ein System partieller Differentialgleichungen für die unbekannten Funktionen φ, N.
(Γ_{ij}^α ist ja durch die g's bestimmt!)

Bem.: 1), 2) sind die Analoga für Flächen der Frenet-Formeln für Kurven: Man drückt die Ableitung von Tangential- und Normalvektoren wieder mittels der Tangential- und Normalvektoren aus.

(Unterschied zu Frenet: Bei Frenet nahmen wir Bogenlänge parametrisierung an ⇒ $\dot{T}$ hat keine T Komponente! T entspricht $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$)

Wir erhalten eine Integrabilitätsbedingung für die Lösbarkeit des Systems, indem wir

1) nochmal ableiten und

$$\frac{\partial}{\partial u^i}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^j\,\partial u^l}=\frac{\partial}{\partial u^j}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^i\,\partial u^l}$$

verwenden! Am besten einfach losrechnen, s. unten! → Seite 65

Prinzipielle Vorgehensweise:

- schreibe 1) hin, mit jl statt ij, leite nach u^i ab
- schreibe 1) hin, mit ij durch il ersetzt, und leite nach u^j ab.
- Setze die Ergebnisse gleich
- Ersetze die rechts vorkommenden zweiten Ableitungen wieder mittels 1) und die Ableitungen von N mittels 2)
- Wir erhalten eine Gleichung, in der vorkommen:
  - erste Ableitungen der Γ's
  - Produkte zweier Γ's
  - Die Vektoren $\frac{\partial\varphi}{\partial u^\alpha}$ und N
  - g's und h's
  - Ableitungen der h's
- Genauer: Eine Linearkombination der $\frac{\partial\varphi}{\partial u^\alpha}$, N = eine andere Lin. Komb. der $\frac{\partial\varphi}{\partial u^\alpha}$, N

Da $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial u^n}, N\right)$ eine Basis des $\mathbb{R}^{n+1}$ $(\mathbb{R}^3)$

bilden, können wir die Koeffizienten gleichsetzen und erhalten $n+1$ Gleichungen, in denen nur die Γ's und die h's und g's vorkommen.

- Wir interessieren uns hier nur für die Koeffizienten der $\frac{\partial\varphi}{\partial u^\alpha}$ (denn diese führen schließlich zur Gauß-Krümmung)

  Diese enthalten keine Ableitungen der h's!

- Die resultierende Gleichung muss die Form haben, nach Umstellen:

  (Ausdruck in Γ's) = (Ausdruck in h's, g's)

- Wir werden sehen, dass rechts im Wesentlichen die Gauß-Krümmung ($= \det(h_{ij})/\det(g_{ij})$) steht.

  Da die linke Seite allein mittels Γ, also mittels g, ausgedrückt ist, folgt:

Theorema egregium (Gauß, 1827)

Die Gauß-Krümmung ist eine Größe der inneren Geometrie.

Die Rechnung: Seien i, j, l beliebig aber fest

$$\frac{\partial}{\partial u^i}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^j \partial u^l} = \frac{\partial}{\partial u^i}\left(\sum \Gamma_{jl}^{\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial u^\alpha} + h_{jl}N\right)$$

$$= \underbrace{\sum_\alpha \frac{\partial \Gamma_{jl}^\alpha}{\partial u^i}\frac{\partial\varphi}{\partial u^\alpha} + \sum_\alpha \Gamma_{jl}^\alpha \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^i \partial u^\alpha}}_{A} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial u^i}(h_{jl}N)}_{B}$$

Ersetze α durch k in der ersten Summe und berechne $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^i \partial u^\alpha}$ mittels 1):

$$A = \sum_k \frac{\partial\Gamma_{jl}^k}{\partial u^i}\frac{\partial\varphi}{\partial u^k} + \sum_\alpha \Gamma_{jl}^\alpha\left(\sum_k \Gamma_{i\alpha}^k \frac{\partial\varphi}{\partial u^k} + h_{i\alpha}N\right)$$

$$= \sum_k\left[\frac{\partial\Gamma_{jl}^k}{\partial u^i} + \sum_\alpha \Gamma_{jl}^\alpha \Gamma_{i\alpha}^k\right]\frac{\partial\varphi}{\partial u^k} + \text{ein Vielfaches von } N$$

Für B verwende 2):

$$B = h_{jl}\frac{\partial N}{\partial u^i} + \frac{\partial h_{jl}}{\partial u^i}N$$

$$= -\sum_k h_{jl}\, w_i^k \frac{\partial\varphi}{\partial u^k} + \frac{\partial h_{jl}}{\partial u^i}N$$

Insgesamt folgt:

$$\frac{\partial}{\partial u^i}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^j\partial u^l} = \sum_k\left[\frac{\partial\Gamma_{jl}^k}{\partial u^i} + \sum_\alpha \Gamma_{jl}^\alpha\Gamma_{i\alpha}^k - h_{jl}w_i^k\right]\frac{\partial\varphi}{\partial u^k}$$

$$+ \text{ ein Vielfaches von } N.$$

Beachte, dass dies die Darstellung der linken Seite bzgl. der Basis $\frac{\partial\varphi}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial u^n}, N$ von $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.

Wenn man links und rechts i und j vertauscht, erhält man eine analoge Formel für

$$\frac{\partial}{\partial u^j}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^i\partial u^\ell}$$

Nun ist $\displaystyle \frac{\partial}{\partial u^i}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^j\partial u^\ell} - \frac{\partial}{\partial u^j}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^i\partial u^\ell} = 0$

Wir setzen die Formeln oben ein und erhalten

$$\sum_k \Big[\frac{\partial \Gamma^k_{j\ell}}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma^k_{i\ell}}{\partial u^j} + \sum_\alpha (\Gamma^\alpha_{j\ell}\Gamma^k_{i\alpha} - \Gamma^\alpha_{i\ell}\Gamma^k_{j\alpha}) \qquad (*)$$

$$- (h_{j\ell} w^k_i - h_{i\ell} w^k_j) \Big] \frac{\partial\varphi}{\partial u^k}$$

$$+ \text{ ein Vielfaches von } N \quad = 0$$

<u>Def</u>: $R^k_{\ell i j} :=$ der Ausdruck nach $[$ in Zeile $(*)$.

Da $\frac{\partial\varphi}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial u^n}, N$ linear unabhängig sind, folgt, dass der Ausdruck in $[\ ]$ für jedes k gleich 0 ist.

(Außerdem ist der Koeffizient von N gleich 0, aber den brauchen wir hier nicht.)

Satz (Gauß-Gleichung)

Angenommen, $(g_{ij})_{ij}$ und $(h_{ij})_{ij}$ sind die Koeffizienten der ersten bzw. zweiten Fundamentalform einer Hyperfläche M in $\mathbb{R}^{n+1}$ (*). Seien Γ_{ij}^k die Christoffel-Symbole, gegeben durch die Formel auf Seite 57 mittels der Ableitungen der (g_{ij})'s. Dann gilt, mit R^k_{lij} wie oben definiert, für alle i,j,k,l

$$R^k_{lij} = \sum_m (h_{jl} h_{im} - h_{il} h_{jm}) g^{mk}$$

Beweis: Das ist genau die Formel $[\cdots] = 0$ oben, wenn man noch $w_i^k = \sum_m h_{im} g^{mk}$, $w_j^k = \sum h_{jm} g^{mk}$ verwendet. ■

Satz:

Für eine Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$ gilt für die Gauß-Krümmung K:

$$K = \frac{R_{2121}}{\det(g_{ij})} \quad \text{mit } R_{klij} = \sum_m R^m_{lij}\, g_{mk}$$

Insbesondere ist K allein durch die g's (und ihre ersten und zweiten Ableitungen) bestimmt, ist also eine Größe der inneren Geometrie.

(*) bzgl. einer lokalen Karte $\varphi: \hat{U} \to U \subset M$, wobei g_{ij}, h_{ij} Funktionen von $u \in \hat{U}$ sind.

Beweis: Aus der Formel für R^k_{lij} folgt in mittlerweile vertrauter Weise:

$$R_{klij} = \sum_m R^m_{lij}\, g_{mk} = h_{jl} h_{ik} - h_{il} h_{jk}$$

Setze nun $j=l=1$, $i=k=2$, dann steht rechts

$$h_{11} h_{22} - h_{21} h_{12} = \det(\mathrm{II}) = K \cdot \det(\mathrm{I}) = K \cdot \det(g_{ij}),$$

und damit die Behauptung. $\blacksquare$

Bemerkungen

- Versuchen Sie erst gar nicht, sich diese Formeln zu merken.
  Wesentlich war: R^k_{lij}, definiert durch (Verfolgen Sie die Rechnung zurück.)

$$\sum R^k_{lij} \frac{\partial\varphi}{\partial u^k} = \nabla_{\frac{\partial\varphi}{\partial u^i}} \nabla_{\frac{\partial\varphi}{\partial u^j}} \frac{\partial\varphi}{\partial u^l} - \nabla_{\frac{\partial\varphi}{\partial u^j}} \nabla_{\frac{\partial\varphi}{\partial u^i}} \frac{\partial\varphi}{\partial u^l}$$

ist eine innere Größe (da ∇ eine innere Größe ist) und drückt für Flächen „im Wesentlichen" die Gauß-Krümmung aus.

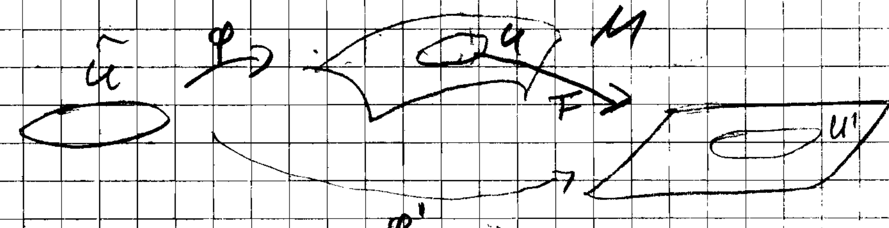
R heißt „Riemannscher Krümmungstensor" (bzw. R^k_{lij} sein Ausdruck in lokalen Koordinaten).

Wir werden später eine invariante (Koordinatenunabhängige) Definition von R kennenlernen, die sehr viel transparenter als die Formel mit den Γ's ist.

• Dass K eine Größe der inneren Geometrie ist, kann man, wie wir sehen werden, auch sehr viel „geometrischer" einsehen. Auf dem Weg dorthin braucht man aber Formeln wie die oben angegebene.

• Falls M flach ist, so muss $R^h_{lij}(u)=0$ $\forall i,j,l,h$ $\forall u$ gelten.

(Denn:



Sei F eine Isometrie von $U \subset M$ auf eine Teilmenge U' der x,y-Ebene.

Seien (g'_{ij}), (h'_{ij}) die Matrizen für 1.+2. Fund.form von U' bzgl. der lokalen Karte $F\circ\varphi=\varphi'$.

Wegen $U' \subset (x,y)$-Ebene ist $h'_{ij}=0$ $\forall i,j$, und da F Isometrie ist, folgt $g'_{ij}=g_{ij}$ $\forall i,j$.

Also gilt nach der Gauß-Gleichung $R^h_{lij}=0$ ■

Man kann zeigen, dass die Umkehrung auch gilt:

Ist $R^h_{lij}(u)=0$ $\forall u$ (bzw. $K\equiv 0$ für Flächen), so ist M flach.

(Dies ist analog dazu, dass aus $\frac{\partial X^i}{\partial u^j}=\frac{\partial X^j}{\partial u^i}$ $\forall i,j$ folgt, dass X lokal ein Gradientenfeld ist.)

Also:

Gegeben eine Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$.

Wie bestimmt man, ob M flach ist, d.h. ob M überall verzerrungsfreie Karten hat?

(also einen verzerrungsfreien Atlas)

1. Finde lokale Karten $\varphi: \tilde{U} \to U \subset M$

(entweder ist M schon durch Karten gegeben, oder als $M = F^{-1}(0)$, dann findet man φ mittels des Satzes über implizite Funktionen.)

2. Bestimme $g_{ij}(u) = \langle \frac{\partial \varphi}{\partial u^i}(u), \frac{\partial \varphi}{\partial u^j}(u) \rangle$, $i,j = 1,2$.

3. Bestimme die Christoffelsymbole Γ_{ij}^k mit der Formel auf Seite 57.

4. Bestimme R_{121}^k mit der Formel auf Seite 66.

5. Bestimme K mit der Formel auf Seite 67.

6. M ist flach (zumindest auf U) $\Leftrightarrow$ $K \equiv 0$.

Bem: Für $n=2$ sind unter den $2^4 = 16$ Zahlen R_{klij}, $i,j,k,l \in \{1,2\}$ alle gleich Null, für die $k=l$ oder $i=j$ ist, und die anderen sind K oder $-K$. Das folgt aus der Formel auf Seite 68 oben.

R enthält also (für $n=2$) nicht mehr Information als K.