<u>Bem</u>: Die Methode auf S. 70 ist in den meisten Fällen zu kompliziert.
Sie beruht allein auf der <u>inneren</u> Formel für K.

Praktisch kann man K einfacher direkt aus der Definition mit Hilfe extrinsischer Größen bestimmen $\left(K = \dfrac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})} \right)$

und dann direkt zu Schritt 6 springen

IV.4 Parallelverschiebung, Geodätische

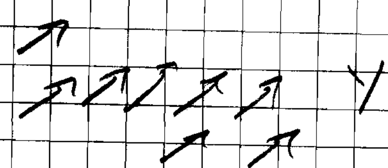
<u>Ziel</u>: Ein geometrisches Verständnis für die kovariante Ableitung ∇ gewinnen.

<u>Methode</u>: Untersuchen, was es für ein Vektorfeld Y bedeutet, dass $\nabla_X Y = 0$ für ein Vektorfeld X.

<u>Beispiel</u>: Sei $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^N)$. Dann gilt:

$$\nabla_X Y = 0 \text{ für alle } X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^N)$$

$$\Leftrightarrow \quad Y = \text{konstant}$$



Wir werden sehen, dass es solche „parallelen" Vektorfelder Y auf Untermannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^N$ im Allgemeinen nicht gibt (und dass genau die innere Krümmung, d.h. K für Flächen bzw. R im Allgemeinen, dafür verantwortlich ist).

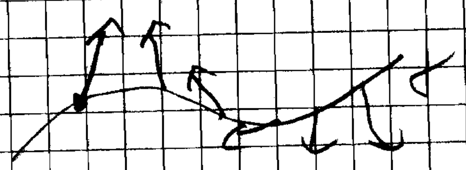
Alles, worauf wir hoffen können, ist <u>Parallelität entlang einer Kurve</u>.

Def. Sei $\gamma: I \to M$ eine parametrisierte Kurve.

Ein Vektorfeld X entlang γ ist eine glatte Abbildung, die jedem $t \in I$ ein $X(t) \in T_{\gamma(t)}M$ zuordnet.

(Im Fall einer einfachen Kurve – d.h. $\dot\gamma \neq 0$ $\forall t$ und γ injektiv – heißt das, dass X ein Vektorfeld auf dem Bild von γ ist, wobei wir es – wie früher bei Kurven – als Funktion von $t \in I$ auffassen)

Bsp.



(X muss nicht tangential an γ sein!)

Def. X sei Vektorfeld entlang $\gamma: I \to M$.

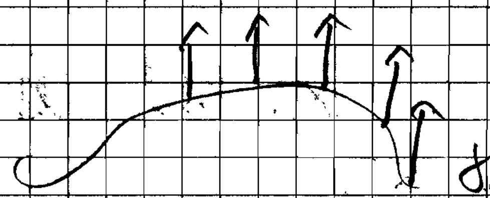
X heißt parallel, falls

$$(*) \qquad \nabla_{\dot\gamma} X = 0$$

ist.

Bem. $(*)$ ist sinnvoll, obwohl X nur auf γ und nicht in einer Umgebung davon definiert ist.
Denn es wird nur die Ableitung in Richtung $\dot\gamma$ genommen.
(Formel siehe unten)

Beispiel: $M = \mathbb{R}^N$



X parallel entlang $\gamma \iff X(t) = X(t') \quad \forall t, t'$.

Denn $\nabla^{\mathbb{R}^N}_{\dot\gamma} X = \frac{d}{dt} X(t)$, und das ist $\equiv 0 \iff X = \text{konst.}$

Was bedeutet (*) für M beliebig?

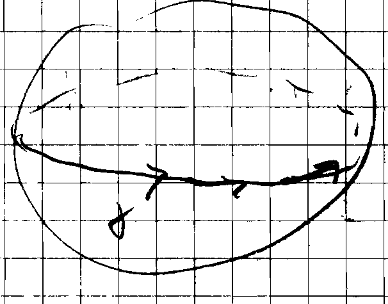
Erinnerung: $\nabla_{\dot\gamma(t)} X_t =$ orthogonale Projektion von $\nabla^{\mathbb{R}^N}_{\dot\gamma(t)} X_t = \frac{d}{dt} X(t)$ auf $T_{\gamma(t)} M$.

Also: Für $M \subset \mathbb{R}^N$ ist X parallel entlang γ

$\iff \frac{dX}{dt}(t)$ steht senkrecht auf M (d.h. auf $T_{\gamma(t)} M$) für alle t.

D.h. die Änderung von X steht immer senkrecht auf M, ist also innerhalb M „nicht zu sehen".

Bsp: $M = S^2$, $\gamma =$ Äquator (mit konstanter Geschwindigkeit), $X =$ Einheitstangentialvektor an



$\frac{dX}{dt}$ liegt in der x-y-Ebene,

steht senkrecht auf $\dot\gamma$

$\Rightarrow$ steht senkrecht auf S^2

$\Rightarrow X$ ist parallel entlang γ.

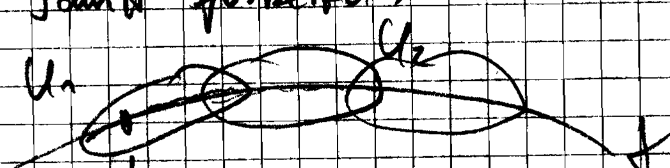
Wegen Symmetrie gilt das analog für jeden Großkreis (= Schnitt von S^2 mit Ebene durch 0)

Beachte: X_t, $X_{t'}$ sind nicht parallel als Vektoren in $\mathbb{R}^3$.

Man kann Vektoren immer parallel verschieben:

Satz: Sei $\gamma: I \to M$ Kurve, $t_0 \in I$ (I Intervall) und $X_{t_0} \in T_{\gamma(t_0)}M$ gegeben.
Dann gibt es genau ein paralleles Vektorfeld X entlang γ, das bei t_0 gleich X_{t_0} ist.

Beweis: Wir zeigen, dass $\nabla_{\dot\gamma} X = 0$ äquivalent zu einem linearen System gewöhnlicher Differentialgleichungen ist.
Wir nehmen an, das Bild von γ liege in einer einzigen Kartenumgebung $U \subset M$.
Ist das nicht der Fall, können wir Bild γ durch solche U überdecken und X Schritt für Schritt fortsetzen:



Sei $\varphi: \tilde{U} \to U$ lokale Karte. Schreibe

$$X = \sum X^j \frac{\partial \varphi}{\partial u^j}, \quad X^i = X^i(t),$$

und

$$\dot{\gamma} = \sum a^i \frac{\partial \varphi}{\partial u^i} \qquad a^i = a^i(t).$$

Dann ist

$$\nabla_{\dot{\gamma}} X = \nabla_{\dot{\gamma}} \Big(\sum_j X^j \frac{\partial \varphi}{\partial u^j}\Big) = \sum_j \Big(\dot{X}^j \frac{\partial \varphi}{\partial u^j} + X^j \nabla_{\dot{\gamma}} \frac{\partial \varphi}{\partial u^j}\Big),$$

da $\underbrace{\dot{\gamma} X^j}_{\text{Richtungsableitung}} = \frac{d}{dt} X^j =: \dot{X}^j$ ist.

Rechne $\nabla_{\dot{\gamma}} \frac{\partial \varphi}{\partial u^j} = \nabla_{\sum a^i \frac{\partial \varphi}{\partial u^i}} \frac{\partial \varphi}{\partial u^j} = \sum_i a^i \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial u^i}} \frac{\partial \varphi}{\partial u^j}$

$$= \sum_i a^i \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi}{\partial u^k}.$$

In $\sum_j \dot{X}^j \frac{\partial \varphi}{\partial u^j}$ ändere j zu k. Es ergibt sich

$$\nabla_{\dot{\gamma}} X = \sum_k \Big(\dot{X}^k + \sum_j X^j \sum_i a^i \Gamma_{ij}^k\Big) \frac{\partial \varphi}{\partial u^k}$$

Da $\frac{\partial \varphi}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial u^n}$ linear unabhängig sind, gilt

$$\nabla_{\dot{\gamma}} X = 0 \iff \dot{X}^k + \sum_j X^j F_j^k = 0, \quad F_j^k = \sum a^i \Gamma_{ij}^k$$

für $k = 1, \ldots, n$

Hierbei sind F_j^k glatte Funktionen von t (denn Γ_{ij}^k ist bei $\gamma(t)$ auszuwerten)

Dies ist ein (homogenes) lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung für $\begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix}$.

Satz über Existenz + Eindeutigkeit für solche Systeme sagt:

Zu gegebener Anfangsbedingung $\begin{pmatrix} X^1(t_0) \\ \vdots \\ X^n(t_0) \end{pmatrix}$

gibt es genau eine Lösung, und diese ist für alle $t \in I$ definiert. ∎

<u>Def</u>: Seien $p, q \in M$ und γ eine Kurve in M von p nach q, d.h. $\gamma : [a,b] \to M$,
$\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$.

Zu beliebigem $v \in T_pM$ gibt es nach dem Satz genau ein paralleles Vektorfeld X entlang γ mit $X_a = v$.

Die Abbildung $P_\gamma : T_pM \to T_qM$, die $v \in T_pM$ den Wert $X_b \in T_qM$ zuordnet, heißt <u>Parallelverschiebung entlang γ von p nach q</u>.

Satz. Die Parallelverschiebung ist eine orthogonale lineare Abbildung $P_\gamma : T_pM \to T_qM$.

Insbesondere erhält sie Längen und Winkel.

Beweis:

a) Linear: Da das Differentialgleichungssystem homogen + linear ist, hängt die Lösung linear von der Anfangsbedingung ab.

b) Orthogonal, d.h. sind X, Y parallele Vektorfelder entlang γ, so gilt

$$g(X_a, Y_a) = g(X_b, Y_b)$$

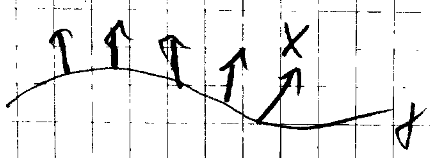
Dazu zeigen wir $\frac{d}{dt} g(X_t, Y_t) \stackrel{!}{=} 0$

$\frac{d}{dt}$ bedeutet Richtungsableitung in Richtung $\dot\gamma$, also ist

$$\frac{d}{dt} g(X_t, Y_t) = g(\underbrace{\nabla_{\dot\gamma} X_t}_{=0}, Y_t) + g(X_t, \underbrace{\nabla_{\dot\gamma} Y_t}_{=0})$$

$$= 0,$$

da $\nabla_{\dot\gamma} X = 0$, $\nabla_{\dot\gamma} Y = 0$. ∎

Also: 

X parallel

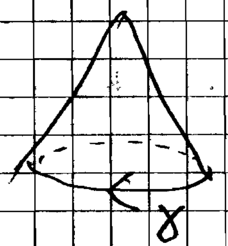
$\Rightarrow X$ hat konstante

Bew. Für Flächen ist P_γ also eine Drehung (warum keine Spiegelung?)

Bemerkung: Parallelverschiebung hängt von der Kurve ab.

Äquivalent: Durch Parallelverschiebung entlang einer geschlossenen Kurve (von p nach p) erhält man im Allgemeinen nicht den Anfangsvektor zurück!

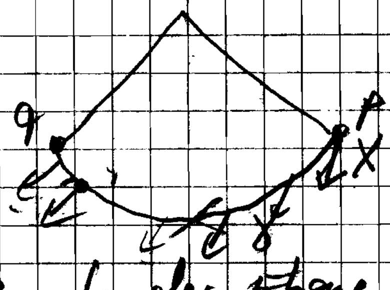
Beispiel: Kegel



γ = ein „Breitenkreis".

Für diesen Fall kann man den Parallelverschiebung ohne Rechnung bestimmen, da wir wissen, dass es sich um eine Größe der inneren Geometrie handelt.

Schneide den Kegel auf + rolle ihn in die Ebene ab.



Dies ist Isometrie. In der Ebene bedeutet „parallel" das Übliche. Man sieht: Ist X_p zum Beispiel tangential an γ, so ist es X_q nicht. Aber p, q sind derselbe Punkt auf dem Kegel! D.h. X dreht sich von γ weg!

Besser: γ macht fahrtwärts eine Rechtskurve, dreht sich also von X weg!