Geodätische

Was heißt „geradeaus fahren" auf einer Fläche?
Dass innerhalb der Fläche keine Richtungsänderung stattfindet.

Def: $\gamma: I \to M$ heißt Geodätische, falls

$$\nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma = 0$$

ist, falls also $\dot\gamma$ parallel entlang γ ist.

Bem: Wegen $\nabla^{\mathbb{R}^N}_{\dot\gamma} \dot\gamma = \ddot\gamma$ = Beschleunigung
ist dies äquivalent dazu, dass die Beschleunigung (in $\mathbb{R}^N$)
(= momentane Änderung des Geschwindigkeitsvektors $\dot\gamma$)
immer senkrecht auf M steht.

Bsp: Wir haben oben gesehen (S. 74), dass auf S^2
jeder Großkreis, mit konstanter Geschwindigkeit
durchlaufen, eine Geodätische ist.

Dies sind auch die einzigen, wie wir sehen werden.

Bem: • γ Geodätische $\Rightarrow$ $\|\dot\gamma(t)\|$ ist konstant
(da parallele Vektorfelder konstante Länge haben)

Bsp: Im $\mathbb{R}^N$ ist $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \ddot\gamma$, also γ Geodätische $\Leftrightarrow$ γ Gerade
(mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen)

- Zur Bedeutung, intrinsisch:
  - ein Auto, das mit geradegestelltem Lenkrad auf M fährt, fährt entlang einer Geodätischen.

    (idealisiert, wenn wir den Radabstand als vernachlässigbar klein annehmen).
  - ein Teilchen, das sich nur innerhalb M bewegen kann und auf das keine Kräfte einwirken, bewegt sich entlang Geodätischen.
  - dasselbe für Lichtstrahlen

Diese Interpretationen machen folgenden Satz plausibel:

<u>Satz</u> (Existenz und Eindeutigkeit von Geodätischen)

Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ Untermgfk, $p \in M$, $v \in T_pM$.
Dann gibt es eine eindeutige maximale Geodätische

$$\gamma : I \to M$$

wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist, $0 \in I$, mit

$$\gamma(0) = p$$
$$\dot\gamma(0) = v$$

Die Abbildung $(t, p, v) \to \gamma(t)$ ist glatt.

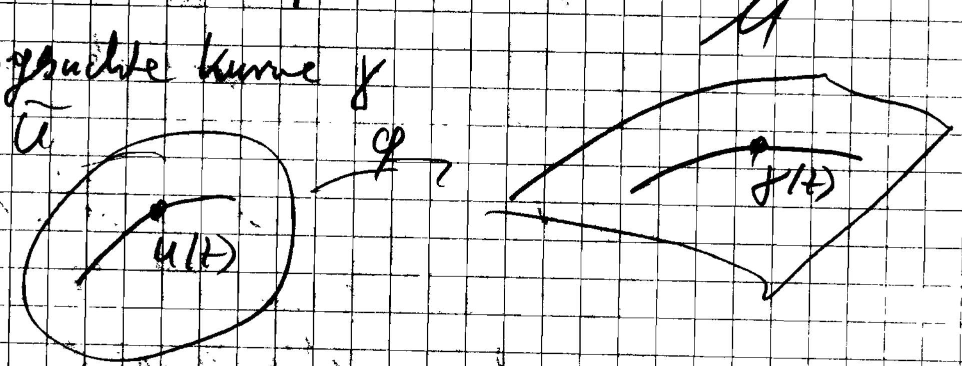
(Maximal heißt: Es gibt keine Geodätische $\tilde\gamma : \tilde I \to M$ mit denselben Anfangsbedingungen und $\tilde I \supsetneq I$.)

Beweis: Wir beweisen hier nur Existenz auf einem Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$, und Eindeutigkeit darauf, für ein $\varepsilon > 0$.
Der Rest ist eine Übung.

Wir schreiben die Gleichung $\nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma = 0$ in lokalen Koordinaten:

Schreibe $\gamma(t) = \varphi(u^1(t), \dots, u^n(t))$

für die gesuchte Kurve γ



Wir leiten aus $\nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma = 0$ ein Differentialgleichungssystem für $u^1(t), \dots, u^n(t)$ her:

$$\dot\gamma = \sum_i \dot u^i \frac{\partial \varphi}{\partial u^i} \quad \text{nach Kettenregel}$$

Nach der Rechnung auf Seite 76, mit $a^i = \dot u^i$ und $X = \dot\gamma$, also $X^j = \dot u^j$, folgt

$$\nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma = 0 \iff \ddot u^k + \sum_{i,j} \dot u^i \dot u^j \Gamma_{ij}^k(u) = 0 \qquad k = 1 \dots n$$

Dies ist ein System von n Gleichungen 2. Ordnung, der Form $\ddot u = F(u, \dot u)$
Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz hat dies eine eindeutige Lösung definiert in einer Umgebung von 0, wenn $\gamma(0)$, $\dot\gamma(0)$ vorgegeben sind, die

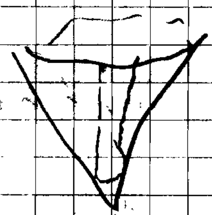
(nach dem Satz über die glatte Abhängigkeit der Lösung von den Anfangswerten) glatt von p und v abhängt ■

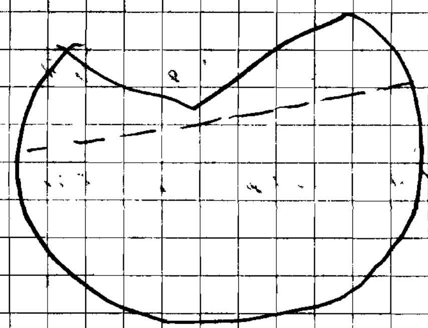
Bsp.: • $M = S^2$: da durch jeden Punkt $p \in S^2$ und für jedes $v \in T_p S^2$ ein Großkreis durch p mit Richtung v existiert (der Schnitt von S^2 mit der von p und v aufgespannten Ebene) und da Großkreise Geodätische sind, sind dies sämtliche Geodätische.
Sie sind für alle Zeiten t definiert ($I = \mathbb{R}$)

• M = eine beschränkte offene Teilmenge von $\mathbb{R}^N$

Geodätische sind Geraden (und Punkte).
Da Geraden nach endlicher Zeit den Rand treffen, sind diese nur für ein endliches Intervall I definiert. (I hängt von p, v ab).

• Kegel:





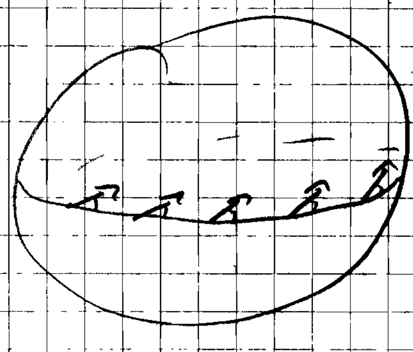
Frage: Ein Schiff fährt in Irland in Richtung Westen los und fährt dann immer geradeaus.
Wo trifft es wieder auf Land?
(Angenommen, es gäbe keine Strömungen und Winde).

Bem: Parallelverschiebung entlang einer Geodätischen in einer Fläche: Es gilt:

Sei γ Geodätische in der Fläche M.
Ein Vektorfeld X entlang γ ist parallel
$\Leftrightarrow$ X hat konstante Länge
und der Winkel von $\dot{\gamma}$ und X ist konstant.

(Übung)

Bsp: Sphäre



Die intrinsische Bedeutung von Geodätischen folgt (neben den oben angeführten Argumenten) auch aus:

Satz: Kürzeste Linien sind Geodätische.

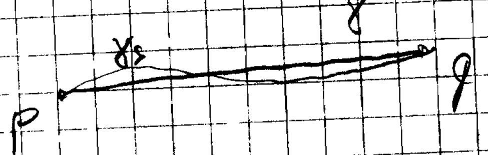
D.h. Seien $p, q \in M$ und γ eine Kurve von p nach q. Angenommen, für jede andere Kurve $\tilde{\gamma}$ von p nach q gilt

$$L[\tilde{\gamma}] \geq L[\gamma].$$

Dann ist γ eine Geodätische.

Beweis: OBdA sei γ nach Bogenlänge parametrisiert und

$$\gamma : [0, L] \to M$$
$$\gamma(0) = p, \quad \gamma(L) = q.$$



Wir betrachten „Variationen" von γ, d.h. Kurvenscharen γ_s, $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ von Kurven, die auch p, q verbinden

$\gamma_s : [0, L] \to M$ mit $\gamma_0 = \gamma$

Schreibe $\gamma(s, t) = \gamma_s(t)$

Es ist $\displaystyle L[\gamma_s] = \int_0^L \sqrt{g(\dot\gamma_s, \dot\gamma_s)}\, dt$

$\dot\gamma_s := \frac{\partial}{\partial t}\gamma_s$ (Beachte: γ_s muss nicht nach Bogenlänge parametrisiert sein)

Der Integrand ist glatt in s, also ist $s \longmapsto L[\gamma_s]$ eine glatte Funktion. Nach Annahme hat sie ein Minimum bei $s=0$.

Also folgt $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L[\gamma_s] = 0$.

Wir berechnen diese Ableitung. Zunächst ist

$$\frac{d}{ds}\, g(\dot\gamma_s, \dot\gamma_s) = 2\, g\Big(\underbrace{\nabla_{\frac{\partial\gamma}{\partial s}} \frac{\partial\gamma}{\partial t}}_{= \frac{\partial^2\gamma}{\partial s \partial t} = \frac{\partial^2\gamma}{\partial t \partial s} = \nabla_{\frac{\partial\gamma}{\partial t}} \frac{\partial\gamma}{\partial s}}, \frac{\partial\gamma}{\partial t}\Big)$$

$$= 2\cdot\Big(\frac{\partial}{\partial t}\, g\Big(\frac{\partial\gamma}{\partial s}, \frac{\partial\gamma}{\partial t}\Big) - g\Big(\frac{\partial\gamma}{\partial s}, \underbrace{\nabla_{\frac{\partial\gamma}{\partial t}} \frac{\partial\gamma}{\partial t}}_{= \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma}\Big)\Big)$$

Außerdem $\displaystyle \frac{\partial}{\partial s}\sqrt{g(\dot\gamma_s, \dot\gamma_s)} = \frac{\frac{d}{ds}\, g(\dot\gamma_s, \dot\gamma_s)}{2\sqrt{g(\dot\gamma_s, \dot\gamma_s)}}$

Wir werten die Ableitungen bei $s=0$ aus; wegen $\|\dot\gamma_0\| = 1$ ist die Wurzel gleich 1.

Insgesamt

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L[\gamma_s] = \int_0^L \left[\frac{\partial}{\partial t} g\left(\frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial t}\right) - g\left(\frac{\partial \gamma}{\partial s}, \nabla_{\dot\gamma_0} \dot\gamma_0\right)\right] dt$$

Das Integral über den ersten Term ist gleich

$$g\left(\frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial t}\right)\Big|_{t=0}^{t=L} = 0 \, , \quad \text{denn}$$

wegen $\gamma(s,0) = p \ \forall s$, $\gamma(s,L) = q \ \forall L$

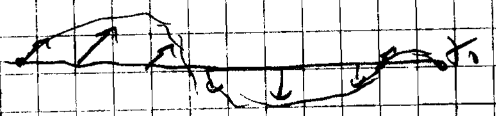
ist $\frac{\partial \gamma}{\partial s} = 0$ für $t=0$ und $t=L$

Es bleibt

$$\boxed{\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L[\gamma_s] = -\int_0^L g\left(\frac{\partial \gamma}{\partial s}\Big|_{s=0}, \nabla_{\dot\gamma_0} \dot\gamma_0\right) dt}$$

„Erste Variation der Länge“

Beachte: $\frac{\partial \gamma}{\partial s}\Big|_{s=0} =: X_t$ ist ein Vektorfeld entlang γ.



Nun war aber γ_s frei wählbar, und zu jedem Vektorfeld X entlang γ mit $X_0 = 0$, $X_L = 0$ gibt es eine Schar γ_s mit $\frac{\partial \gamma}{\partial s}\Big|_{s=0} = X$

Also folgt die Behauptung aus folgendem Lemma, mit $Y = \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma$:

<u>Lemma</u>: Sei Y ein Vektorfeld entlang $\gamma : [0,L] \to M$. Angenommen, für jedes Vektorfeld X entlang γ mit $X_0 = X_L = 0$ gilt

$$\int_0^L g(X_t, Y_t)\,dt = 0$$

Dann ist $Y_t = 0$ für alle t.

(Beweis: Analog zur entsprechenden Aussage über Funktionen.

Falls $Y_{t_0} \neq 0$ für ein $t_0 \in (0,L)$, so wähle eine glatte Funktion $\rho : [0,L] \to \mathbb{R}$ mit

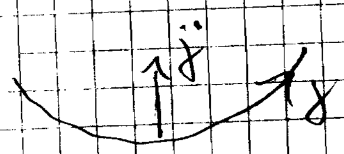
- $\rho(t) \geq 0 \quad \forall t$
- $\rho(0) = \rho(L) = 0$
- $\rho(t_0) > 0$.

Setze $X_t = \rho(t) Y_t$.
Dann ist $g(X_t, Y_t) = \rho(t) \cdot \|Y_t\|^2 \geq 0$,
und > 0 für $t = t_0$, also $\int g(X_t, Y_t)\,dt > 0$,
Widerspruch! $\blacksquare$

Die Formel für die erste Variation der Länge ist auch für beliebige Kurven interessant:

zB in der Ebene: $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \ddot\gamma$ = Beschleunigung

(zeigt ins „Innere" der Kurve)



Die Formel sagt zB: Verschiebt man γ in Richtung $\ddot\gamma$, so nimmt die Länge ab.

Das ist plausibel:

$(s>0)$