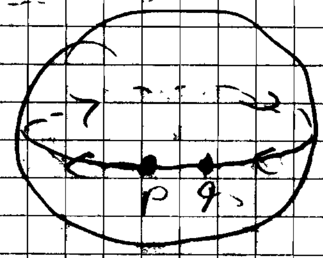
Bemerkung: Gilt auch die Umkehrung, d.h. sind Geodätische immer kürzeste Verbindungen?

Im Allgemeinen nicht:
Um von p nach q zu kommen, kann man „hinten rum" (nach Westen) gehen.



Das ist eine Geodäte, aber offenbar nicht der kürzeste Weg von p nach q.

Lokal ist die Antwort aber JA. Genauer gilt:

Satz: Jeder Punkt $p \in M$, M Untermgf. des $\mathbb{R}^N$, hat eine Umgebung U, so dass gilt

- Zu je zwei Punkten $q, q' \in U$ gibt es genau eine Geodäte von q nach q', die in U verläuft;
- diese ist der kürzeste Weg von q nach q' (unter allen Wegen in M!)

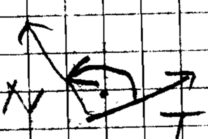
Bsp: Auf S^2 kann man für U irgendeine Kreisscheibe vom Radius $< \frac{\pi}{2}$ wählen (also enthalten in einer Halbsphäre)

(Beweis des Satzes: siehe DiffGeo-Bücher.)

Geodätische Krümmung

Wir erinnern uns an den Anfang der Vorlesung (Kurven in der Ebene) und wollen die Überlegungen dort auf Kurven in einer Fläche M verallgemeinern.
Insbesondere hatten wir für $c: I \to \mathbb{R}^2$ die Krümmung definiert: Bei $\|\dot c\| = 1$ (Bogenlängenparametrisierung).
Dann ist die Krümmung κ^{eR} definiert durch:

- $|\kappa| = \|\ddot c\|$
- $\kappa > 0$, wenn $\ddot c$ in Richtung N zeigt, wobei
  N = Drehung von T um $+\frac{\pi}{2}$



  sonst $\kappa < 0$.

Kurz: κ ist durch $\ddot c = \kappa N$ definiert.
Das Vorzeichen wird später sehr wichtig sein, daher überlegen wir uns für eine Fläche M zunächst, was „Drehung um $+\frac{\pi}{2}$" bedeutet.

Beachte:
Eine Drehung um $+\frac{\pi}{2}$ (d.h. gegen den Uhrzeigersinn) von oben betrachtet

= eine Drehung um $-\frac{\pi}{2}$ (d.h. im Uhrzeigersinn) von unten betrachtet

Eine Festlegung, was „positiver Drehsinn" bedeutet, hängt also damit zusammen, von welcher Seite man auf M guckt.

Anders gesagt: mit der Wahl eines (Einheits-) Normalenvektors auf M

<u>Definition</u>: Sei (M, N) eine orientierte Fläche, d.h. N ist ein glattes Einheitsnormalenfeld auf M. Sei $p \in M$. Eine Orthonormalbasis (e_1, e_2) von T_pM heißt <u>positiv orientiert</u> $:\Leftrightarrow$ die ONBasis (e_1, e_2, N) von $\mathbb{R}^3$ ist positiv orientiert, d.h. $\det(e_1, e_2, N) > 0$

sonst <u>negativ orientiert</u>.

<u>Bem</u>: $\det(e_1, e_2, N) > 0 \Leftrightarrow$ „Rechte-Hand-Regel"

e_1: Daumen
e_2: Zeigefinger
N: Mittelfinger
} der rechten Hand

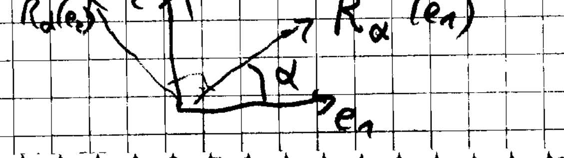
<u>Bem</u>: Rotiert man e_1, e_2 gemeinsam, ändert sich deren Orientierung nicht.

Winkel in T_pM werden immer „von e_1 in Richtung e_2" gemessen mit e_1, e_2 positive Basis.

<u>Bem</u>: Gegeben eine Orientierung, dann ist der Begriff „Rotation um α" für jeden Tangentialraum wohldefiniert:

$$R_\alpha : T_pM \to T_pM$$
$$e_1 \mapsto e_1 \cos\alpha + e_2 \sin\alpha$$
$$e_2 \mapsto -e_1 \sin\alpha + e_2 \cos\alpha$$

(e_1, e_2 positiv orientierte ON Basis)



Man sieht leicht, dass R_x wohldefiniert ist, d.h. nicht von der Wahl von e_1, e_2 abhängt.

Def: Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ Fläche mit Orientierung N.

Sei $\gamma : I \to M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, d.h. $\|\dot\gamma(t)\| = 1 \ \forall t \in I$.

Sei $t \in I$. Wähle $n \in T_{\gamma(t)} M$ derart, dass

$$(\dot\gamma, n) \quad \text{eine positiv orientierte ON-Basis ist}$$

Die geodätische Krümmung $k_g \in \mathbb{R}$ von γ in t ist definiert durch

$$\frac{\nabla}{dt} \dot\gamma = k_g \cdot n$$

(oder: $k_g = g\left(\frac{\nabla}{dt}\dot\gamma, n\right)$)

Bem. Wegen $\|\dot\gamma\|^2 = g(\dot\gamma, \dot\gamma) = 1 \ \forall t$ ist

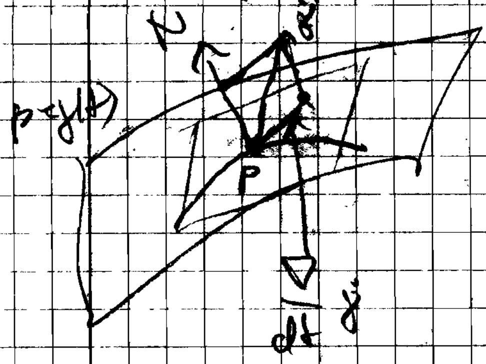
$$0 = \frac{d}{dt} g(\dot\gamma, \dot\gamma) = 2g\left(\frac{\nabla}{dt}\dot\gamma, \dot\gamma\right), \text{ also}$$

$$\frac{\nabla}{dt}\dot\gamma \perp \dot\gamma$$

Da außerdem $\frac{\nabla}{dt}\dot\gamma \in T_{\gamma(t)} M$ ist, muss $\frac{\nabla}{dt}\dot\gamma$ ein skalares Vielfaches von n sein.

Daher macht die Definition Sinn.

<u>Bem</u>: Zusammenhang von Krümmung κ (als Kurve im Raum), geodätische Krümmung κ_g und Normalkrümmung κ_n.



- $|\kappa_g| = \|$orthogonale Projektion von $\ddot\gamma$ auf $T_pM\|$
- $\kappa_n = \|$orthogonale Projektion von $\ddot\gamma$ auf $N(p)\|$
- $\kappa = \|\ddot\gamma\|$

Nach Pythagoras gilt:

$$\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2$$

Beachte: κ_n sagt etwas über die Krümmung der Fläche im Raum
κ_g sagt etwas über die Krümmung der Kurve in der Fläche!

<u>Bem</u>: • γ Geodäte $\iff \kappa_g = 0$ überall
$\iff \ddot\gamma$ ist überall kollinear mit N

• κ_g ist eine Größe der inneren Geometrie (da ∇ es ist).