IV.5 Der Satz von Gauß-Bonnet

Wir werden einige erstaunliche Beziehungen zwischen Integralen von Gaußscher Krümmung einer Fläche, geodätischer Krümmung von Kurven in der Fläche und „topologischen Invarianten" der Fläche kennenlernen.

Wir werden folgenden Satz benötigen

Umlaufsatz von Hopf: $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ sei eine einfache geschlossene Kurve. Angenommen, γ ist positiv orientiert. Dann gilt

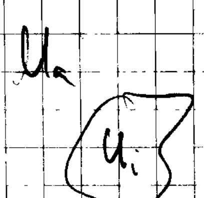
$$\int_a^b \kappa(t)\,dt = 2\pi$$

Begriffe:

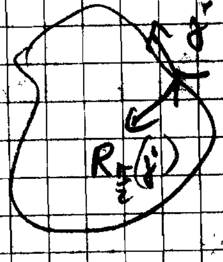
- γ geschlossen: $\gamma(a) = \gamma(b)$ und $\dot\gamma(a) = \dot\gamma(b)$, $\ddot\gamma(a) = \ddot\gamma(b)$ etc.

- γ einfach geschlossen: $\gamma(t) \neq \gamma(t')$ falls $t \neq t'$, $t, t' \in [a,b)$ (keine Selbstschnitte)

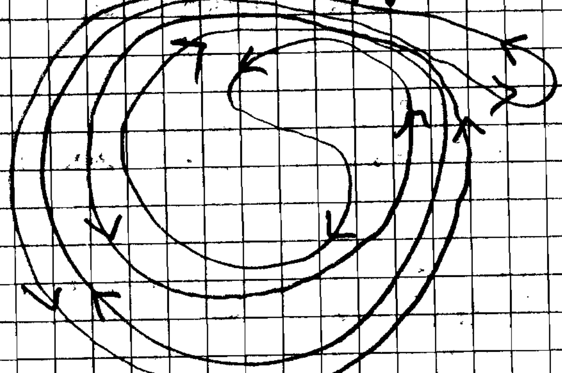
- positiv orientiert: γ zerlegt die Ebene in zwei offene Teilmengen, das „Innere" U_i und das „Äußere" U_a (d.h. $\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{Bild}(\gamma) = U_i \cup U_a$ und U_i, U_a sind zusammenhängend und U_i ist beschränkt, U_a unbeschränkt)



γ heißt positiv orientiert, falls der um $+\frac{\pi}{2}$ gedrehte Tangentenvektor (also $R_{\frac{\pi}{2}}(\dot\gamma)$) in Richtung U_i zeigt.



(Also: „gegen den Uhrzeigersinn")



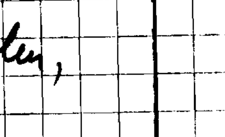
Die Behauptung über U_i, U_a ist der „Jordansche Kurvensatz" und nicht einfach zu beweisen. Wir werden ihn aber nicht verwenden, da Bild(γ) immer als Rand eines beschränkten Gebietes gegeben sein wird.

Für einen Beweis des Umlaufsatzes siehe z.B. Kühnel, Diff Geo.

Warum der Umlaufsatz plausibel ist:

Wir haben früher gezeigt:

Falls $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ glatt ist mit



$$\dot\gamma(t) = (\cos\alpha(t), \sin\alpha(t)) \quad \forall t$$

(OBdA γ nach Bogenlänge parametrisiert) dann ist $\kappa = \dot{\alpha}$

Damit folgt $\int_a^b \kappa(t)\,dt = \int_a^b \dot{\alpha}(t)\,dt = \alpha(b) - \alpha(a)$

= Gesamtänderung von α bei einem vollen Umlauf.

Der Umlaufsatz sagt, dass sich α insgesamt um 2π vergrößert, was recht plausibel klingt (aber für Kurven wie im Bild oben nicht so offensichtlich ist).

Frage: Gilt der Umlaufsatz auf Flächen, wenn man κ durch die geodätische Krümmung ersetzt?

Nein, z.B. Äquator auf Sphäre: $\kappa_g = 0 \Rightarrow \int \kappa_g = 0$.

Für Breitenkreise kommt etwas zwischen 0 und 2π heraus.

<u>Satz</u> (Gauß-Bonnet, erste lokale Version)

Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $\varphi: \tilde{U} \to U \subset M$ ein orthogonales Koordinatensystem (Definitionen s. unten).

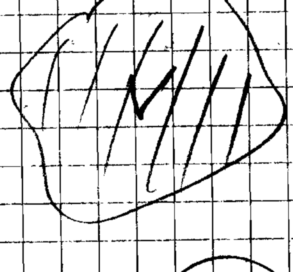
$V \overset{\text{offen}}{\subset} U$ sei einfach zusammenhängend mit glattem Rand, d.h. ∂V kann durch eine einfach geschlossene (*) Kurve γ parametrisiert werden. Dann gilt

$$\int_{\partial V} \kappa_g(t)\,dt + \int_V K \, dvol = 2\pi$$

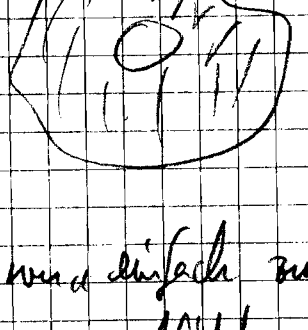
Hierbei ist: κ_g = geodätische Krümmung von γ, positiv durchlaufen.

K = Gauß-Krümmung.

einfach zshg:



<u>nicht</u> einfach zshg:

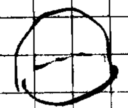


(<u>zwei</u> Randkurven)

(*) Vorsicht: Dies ist die Def. von „einfach zusammenhängend" für Teilmengen der Ebene. Nicht in einer Fläche!

D.h. der Hopf-Umlaufsatz gilt bis auf einen „Defekt" von $\int_V K$ durch.

Bsp. V = Halbsphäre, $k_g = 0$, $K = 1$, $\mathrm{vol}(V) = \frac{4\pi}{2} = 2\pi$.



Beweisschritte:

1) Drücke k_g mittels Winkeländerungen aus.

2) Berechne k_g in lokalen Koordinaten

3) Berechne K in lokalen Koordinaten

4) Wende den Integralsatz von Gauß und den Hopfschen Umlaufsatz an.

1) k_g und Winkeländerung

Wir wollen ein Analogon für „$k = \dot{\alpha}$" finden.
Was soll α sein? Es gibt keine feste Referenzrichtung!

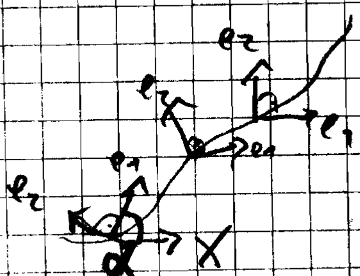
<u>Lemma 1</u>: Sei $\gamma: I \to M$ eine Kurve und e_1, e_2 seien Vektorfelder entlang γ, so dass für jedes t gilt:

$(e_1(t), e_2(t))$ sind eine positiv orientierte ONB (Orthonormalbasis) von $T_{\gamma(t)}M$

Sei X ein paralleles Vektorfeld entlang γ und $\alpha: I \to M$ stetig, so dass $\forall t$ gilt:

$\alpha(t) =$ Winkel von $X(t)$ nach $e_1(t)$

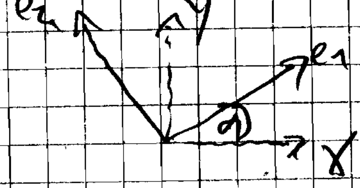
Dann gilt: $$\dot{\alpha} = g\left(\frac{\nabla}{dt} e_1, e_2\right)$$



<u>Beweis</u>: Der Klarheit halber zeigen wir dies zunächst in der Ebene, wo die Formel

$$\dot{\alpha} = \langle \dot{e}_1, e_2 \rangle$$

lautet.



Beachte: $\dot{e}_1$ ist kollinear zu e_2, dies sagt also aus, dass e_1 sich so schnell wie der Winkel ändert.

Sei oBdA $|X|=1$

Wähle Y so, dass X, Y positive ONB ist.

Schreibe
$$e_1 = X\cos\alpha + Y\sin\alpha$$
$$e_2 = -X\sin\alpha + Y\cos\alpha$$

Leite e_1 nach t ab:
$$\dot{e}_1 = X\cdot(-\dot{\alpha}\sin\alpha) + Y(\dot{\alpha}\cos\alpha)$$
$$= \dot{\alpha}\, e_2$$

Also $\langle \dot{e}_1, e_2\rangle = \dot{\alpha}$.

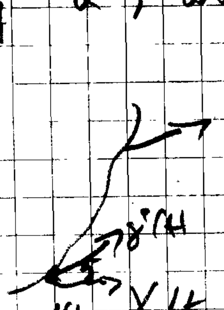
Bei $\dot{e}_1$ haben wir verwendet, dass $\dot{X}=0$, $\dot{Y}=0$ (X unabhängig von t).

Auf einer Fläche läuft der Beweis genauso, außer dass man $\frac{\nabla}{dt} e_1$ statt $\dot{e}_1$ schreibt und $\frac{\nabla}{dt} X = 0$, $\frac{\nabla}{dt} Y = 0$ verwendet.

(Bem: X parallel $\Rightarrow$ Y parallel: Übung!)

Wir wenden das Lemma auf $e_1(t) = \dot{\gamma}(t)$, $e_2(t) = n(t)$ an und erhalten:

Folgerung $\kappa_g = \dot{\alpha}$, wobei $\alpha(t)$ Winkel von einem festen parallelen Vektorfeld $X(t)$ zu $e_1(t)$



Das ist das Analogon zu $\kappa = \dot{\alpha}$ in der Ebene!

2) Orthogonale Koordinaten

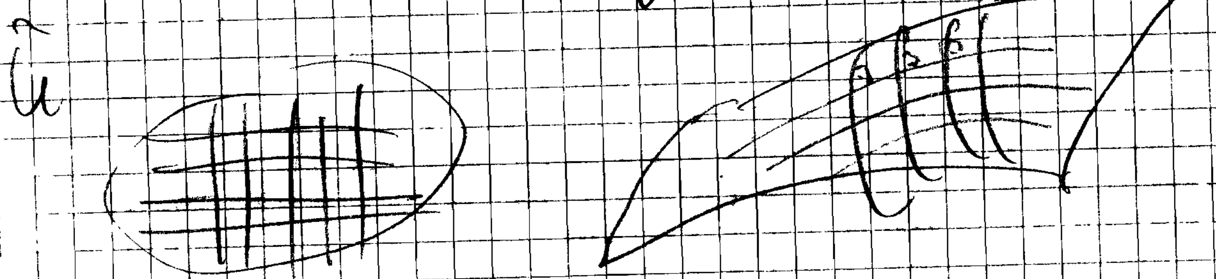
(bzw. die dadurch definierten Koordinaten)

Def: Sei $M \subset \mathbb{R}^3$. Eine lokale Karte $\varphi: \tilde{U} \to U \subset M$ heißt orthogonal, falls

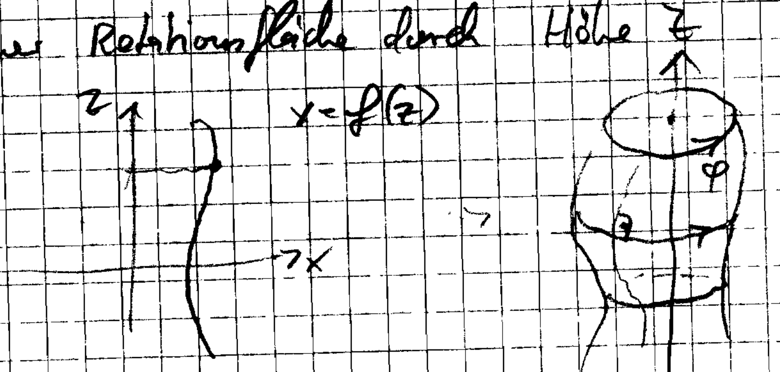
$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) \perp \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v)$$

$\forall\ (u,v) \in \tilde{U}$ gilt.

Mit anderen Worten: Die durch φ definierten Koordinatenlinien schneiden sich rechtwinklig.



Bsp: Parametrisierung einer Rotationsfläche durch Höhe z und Winkel



$$\varphi(\vartheta, z) = (f(z)\cos\vartheta,\ f(z)\sin\vartheta,\ z).$$

<u>Satz</u>: Es gibt überall orthogonale lokale Koordinaten.

D.h.: $M \subset \mathbb{R}^3$ beliebige Fläche, $p \in M$. Dann $\exists$ orthogonale Karte $\varphi : \tilde{U} \to U$ mit $p \in U$.

(Beweis evtl. später, später in Diff.-Gl.; siehe do Carmo für eine ausführliche Diskussion)

Vorteil orthogonaler Koordinaten: Die Rechnungen werden einfacher!

<u>Rechnungen in orthogonalen Koordinaten</u> u, v = Koordinaten auf $\tilde{U}$.

a) Die 1. Fundamentalform:

Statt g_{11} schreibe g_{uu} etc.

Dann gilt $g = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}$, d.h. $g_{uu} = E$
$g_{vv} = G$
$g_{uv} = g_{vu} = 0$.

($E = E(u,v)$, $G = G(u,v)$ Funktionen auf $\tilde{U}$)

Denn per Annahme ist $g_{uv} = g(\varphi_u, \varphi_v) = 0$, da $\varphi_u \perp \varphi_v$

Beachte
$E = g(\varphi_u, \varphi_u)$, $G = g(\varphi_v, \varphi_v)$.

<u>Notation</u> für die folgenden Rechnungen:

$\varphi_u = \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}$, $E_u = \dfrac{\partial E}{\partial u}$ etc.

Die inverse Matrix ist

$g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix}$, d.h. $g^{uu} = \dfrac{1}{E}$, $g^{vv} = \dfrac{1}{G}$, $g^{uv} = g^{vu} = 0$.

b) Die Christoffelsymbole

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right)$$

ergibt:

$$\Gamma_{uuu} = \frac{1}{2} E_u \,, \quad \Gamma_{uvv} = -\frac{1}{2} E_v \,, \quad \Gamma_{uvu} = \frac{1}{2} E_v$$

Die restlichen ergeben sich durch Vertauschen $u \leftrightarrow v$, $E \leftrightarrow G$ oder die Symmetrie $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik}$, z.B.

$$\Gamma_{vvv} = \frac{1}{2} G_v \,, \quad \Gamma_{vuv} = \frac{1}{2} G_u$$

$\Gamma_{ij}^{k} = \sum \Gamma_{ijl}\, g^{lk}$. Hier: $\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ijk} \cdot g^{kk}$, da $g^{lk} = 0$ für $l \neq k$.

Also z.B.

$$\Gamma_{uu}^{u} = \frac{1}{2}\,\frac{E_u}{E} \,, \quad \Gamma_{uu}^{v} = -\frac{1}{2}\,\frac{E_v}{G} \,, \quad \Gamma_{uv}^{u} = \frac{1}{2}\,\frac{E_v}{E}$$

Sei nun γ eine Kurve in M. Wir wollen den im Lemma Seite 100 auftretenden Ausdruck

$$g\left(\frac{\nabla}{dt} e_1, e_2\right)$$

für die ON Basis $\quad e_1 = \frac{\varphi_u}{\sqrt{E}}, \; e_2 = \frac{\varphi_v}{\sqrt{G}}$

berechnen.

Schreibe $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$, also $\quad \dot\gamma = \dot u \varphi_u + \dot v \varphi_v$.

$$\nabla_{\varphi_u} e_1 = \nabla_{\varphi_u} \frac{\varphi_u}{\sqrt{E}} = \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{\sqrt{E}}\right) \varphi_u + \frac{1}{\sqrt{E}} \nabla_{\varphi_u} \varphi_u$$

$$\Rightarrow g(\nabla_{\varphi_u} e_1, e_2) = \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{\sqrt{E}}\right) \underbrace{g\left(\varphi_u, \frac{\varphi_v}{\sqrt{G}}\right)}_{=0} + \frac{1}{\sqrt{EG}} \underbrace{g(\nabla_{\varphi_u} \varphi_u, \varphi_v)}_{= \Gamma_{uuv} = -\frac{1}{2} E_v}$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{EG}} E_v .$$

Analog

$$g(\nabla_{\varphi_v} e_1, e_2) = \dots + \frac{1}{\sqrt{EG}} \underbrace{g(\nabla_{\varphi_v} \varphi_u, \varphi_v)}_{= \Gamma_{vuv} = \frac{1}{2} G_u}$$

Wegen $\quad \nabla_{\dot\gamma} = \nabla_{\dot u \varphi_u + \dot v \varphi_v} = \dot u \nabla_{\varphi_u} + \dot v \nabla_{\varphi_v} \quad$ folgt

$$g(\nabla_{\dot\gamma} e_1, e_2) = \frac{1}{2\sqrt{EG}} (-\dot u E_v + \dot v G_u)$$

Wir verwenden dies wie folgt:

<u>Lemma 2</u>: Sei $\varphi: \tilde{U} \to U$ orthogonale lokale Karte und $\gamma: I \to U$ reguläre Kurve.
Sei $\beta: I \to \mathbb{R}$ stetig derart, dass

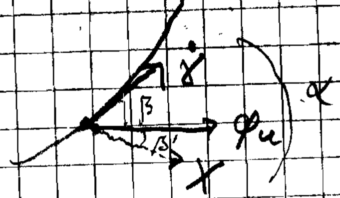
$$\beta(t) = \text{Winkel von } \varphi_u \text{ nach } \dot\gamma .$$

Dann gilt

$$\kappa_g = \dot\beta + \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(-\dot u E_v + \dot v G_u\right)$$

(Formel für κ_g bzgl. orthogonaler Koordinaten)

<u>Beweis</u>



Wähle ein beliebiges paralleles Vektorfeld X entlang γ.
Für die Winkel gilt: $\alpha = \beta + \beta'$.

Außerdem $\beta' = $ Winkel von X nach φ_u
$= g(\nabla_{\dot\gamma} e_1, e_2)$

nach Lemma 1, angewendet auf die ONB $e_1 = \frac{\varphi_u}{\sqrt{E}}$, $e_2 = \frac{\varphi_v}{\sqrt{G}}$

Aus $\kappa_g = \dot\alpha$ und der Rechnung oben folgt die Behauptung. ∎

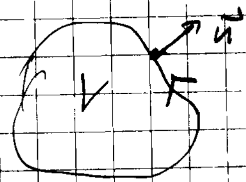
3) K in orthogonalen Koordinaten

Lemma 3: Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ Fläche, $\varphi: \tilde{U} \to U$ eine orthogonale lokale Karte.
Die Gauß-Krümmung ist dann

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left[\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right]$$

Beweis: Übung!

4) Beweis des Satzes auf Seite 98 (lokaler Gauß-Bonnet 1)



Erinnerung: Integralsatz von Gauß:
X Vektorfeld auf V, dann

$$\int_V \operatorname{div} X = \int_{\partial V} X \cdot \vec{n}$$

Für $X = (P, Q)$, ∂V parametrisiert nach Bogenlänge
durch $(u(t), v(t))$, $\vec{n} = R_{-\frac{\pi}{2}}\dot{\gamma} = (\dot{v}, -\dot{u})$

folgt
$$\int_V (P_u + Q_v)\, du\, dv = \int_{\partial V} (\dot{v}P - \dot{u}Q)\, dt$$

Da wir $\int_{\partial V} k_g$ berechnen wollen, nehmen

wir $P = \frac{G_u}{2\sqrt{EG}}$, $Q = \frac{E_v}{2\sqrt{EG}}$

und erhalten für ∂V parametrisiert durch $\gamma : [a,b] \to U$.

$$\int_{\partial V} k_g = \int_a^b k_g(t)\,dt = \int_a^b \dot\beta(t)\,dt + \int_a^b \left(\frac{-E_v}{2\sqrt{EG}}\,\dot u + \frac{G_u}{2\sqrt{EG}}\,\dot v \right) dt$$

$$= \beta(b) - \beta(a) + \underbrace{\int_V \left[\left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u + \left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v \right] du\,dv}$$

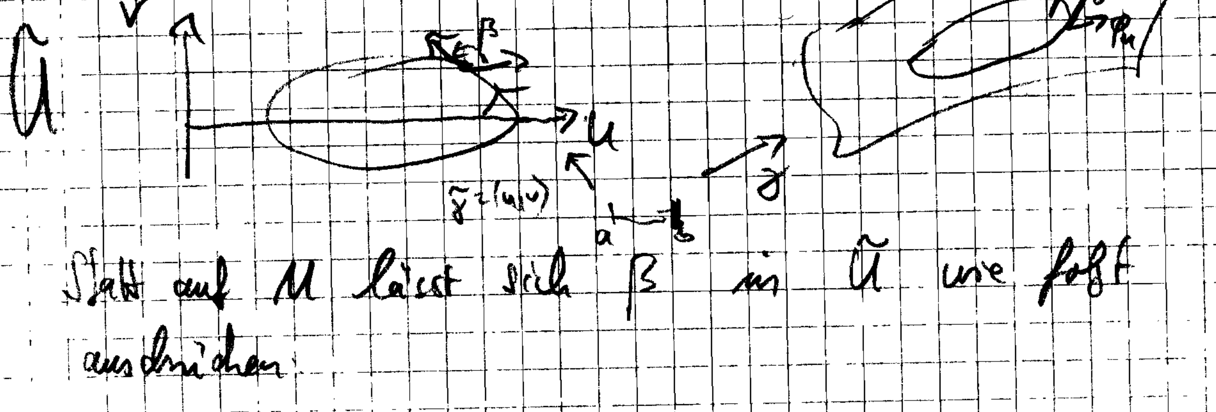
$$= -\int_V K \cdot \sqrt{EG}\; du\,dv$$

$$= -\int_V K\, d\mathrm{vol}$$

da $d\mathrm{vol} = \sqrt{\det g}\; du\,dv = \sqrt{EG}\; du\,dv$.

Was ist $\beta(b) - \beta(a)$?

Die Gesamtänderung des Winkels $\beta = \sphericalangle$ von φ_u nach $\dot\gamma$ bei einem Umlauf von ∂V



Statt auf M lässt sich β in $\tilde U$ wie folgt ausdrücken.