$\beta(t)$ = Winkel zwischen der u-Richtung und $\dot{\gamma}(t)$,
wobei der Winkel mit dem Skalarprodukt $g_{\gamma(t)}$
gemessen wird

(wegen $g = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}$ ist das in Formeln: $\cos\beta = \frac{E\dot{u}}{\sqrt{E}\sqrt{E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2}}$
$\dot{\gamma} = (\dot{u}, \dot{v})$, u-Richtung $= (1,0)$)

Es gilt nun, dass man die Koordinaten sogar konform
wählen kann, d.h. $E = G$ (äquivalent: φ erhält Winkel).

Damit ist $\beta(t)$ = der Winkel wie im $\mathbb{R}^2$ gemessen.

Damit folgt $\beta(b) - \beta(a) = 2\pi$
aus dem Umlaufsatz von Hopf.

(Hier ist ein Argument, das nicht die Existenz konformer
Koordinaten – die schwieriger zu zeigen ist – verwendet:

Für $\tau \in [0,1]$ definiere das Skalarprodukt
$$g_p^\tau = \tau g_p + (1-\tau) g_p^0, \quad (\text{für jedes } p \in \tilde{U})$$
wobei g_p^0 das Euklidische ist (also $g_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$).

Dies ist eine stetige Deformation von g in g_0

Für jedes τ kann man nun β^τ berechnen und damit

$B(\tau) = \beta^\tau(b) - \beta^\tau(a)$.
Dies ist immer ein ganzzahliges Vielfaches von 2π,
kann also nur die diskreten Werte $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$

annehmen.

Andererseits hängt g^τ stetig von τ ab, also ist

$B(\tau)$ stetig in τ.

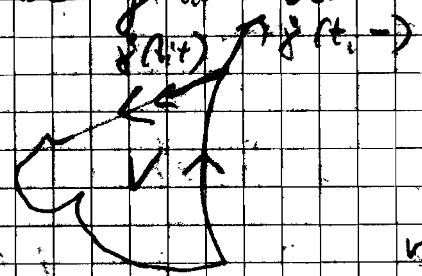
Damit muss B konstant in τ sein (Zwischenwertsatz!)

Nun ist $B(0) = 2\pi$ nach dem Hopfschen Umlaufsatz.

Also folgt $B(1) = 2\pi$, was zu zeigen war.

(Ende des Beweises des lokalen Satzes von Gauß-Bonnet, S. 98)

Wir brauchen noch eine Verallgemeinerung von Satz 1 (S. 98)
Hierbei darf V „Ecken“ haben, d.h. ∂V kann durch eine stückweise glatte Kurve parametrisiert werden.



$\gamma : [a,b] \to U$

$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ n = Anzahl der Ecken

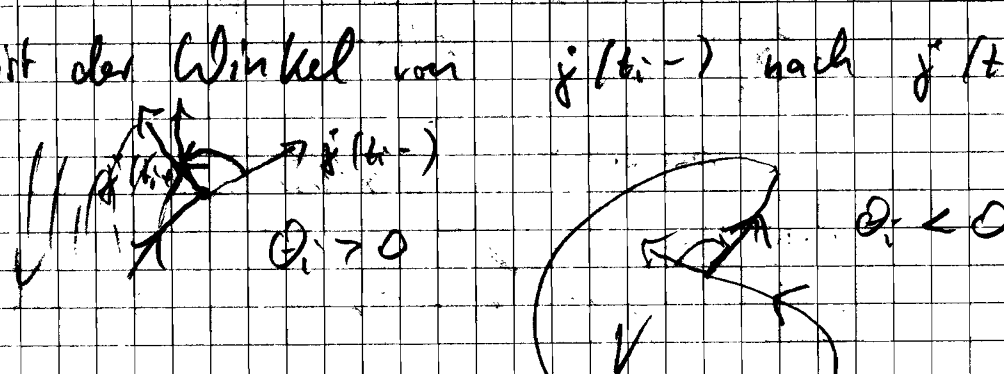
mit $\gamma|[t_{i-1}, t_i]$ glatt und regulär $\forall i = 1, \ldots, n$

An jeder Ecke t_i hat man zwei Tangenten:

$$\dot\gamma(t_i-) = \lim_{\substack{t \to t_i \\ t < t_i}} \dot\gamma(t)$$

$$\dot\gamma(t_i+) = \lim_{\substack{t \to t_i \\ t > t_i}} \dot\gamma(t).$$

Der <u>Außenwinkel</u> θ_i bei t_i (bzw. bei $\gamma(t_i)$) ist der Winkel von $\dot\gamma(t_i-)$ nach $\dot\gamma(t_i+)$



Dabei ist θ_i so gewählt, dass $-\pi < \theta_i < \pi$

[Bem: Man kann auch $\pm\pi$ zulassen, muss sich aber etwas über das Vorzeichen Gedanken machen, s. do Carmo S. 205)

Satz 2 (Lokaler Satz von Gauß-Bonnet, zweite Version)

Die Voraussetzungen seien dieselben wie in Satz 1, außer dass ∂V durch eine stückweise glatte Kurve parametrisiert sei.

Seien $\theta_1 \dots \theta_n$ die Außenwinkel, $\theta_i \in (-\pi, \pi)$.

Dann gilt

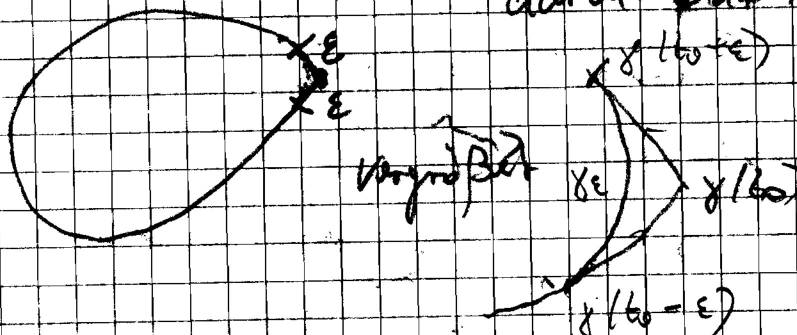
$$\int_{\partial V} k_g + \int_V K \, dvol + \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 2\pi$$

$$\left(\int_{\partial V} k_g := \sum \int_{t_{i-1}}^{t_i} k_g(t)\,dt \right)$$

Beweis (Skizze)

Sei zunächst $n = 1$ (nur eine Ecke).

Wir approximieren V durch Gebiete V_ε mit glattem Rand durch Glätten der Ecke.



Da K integrierbar ist, gilt $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{V_\varepsilon} K \, dA \quad \int_V K \, dvol$.

κ = geod. Krümmung von γ_ε

Für $\int \kappa_{g,\varepsilon}$ gilt:

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \kappa_g(t)\,dt = \int_{|t-t_0|\geq\varepsilon} \kappa_g(t)\,dt + \underbrace{\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \kappa_g(t)\,dt}_{=\alpha(t_0+\varepsilon)-\alpha(t_0-\varepsilon)}$$

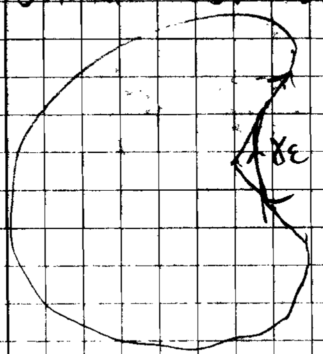
$$\varepsilon \to 0: \quad \int_{|t-t_0|\geq\varepsilon} \kappa_g(t)\,dt \longrightarrow \int_{\partial V} \kappa_g, \qquad \alpha(t_0+\varepsilon)-\alpha(t_0-\varepsilon) \longrightarrow \theta_0$$

(α = Winkel zu einem parallelen Vektorfeld).

Damit folgt der Satz aus Satz 1, angewendet auf V_ε, durch $\varepsilon \to 0$.

Analog für mehrere Ecken gleichzeitig.

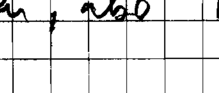
Stimmt das auch bei $\theta_i < 0$?



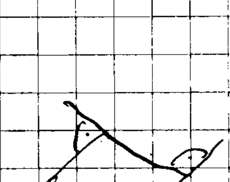
$\alpha(t_0+\varepsilon)-\alpha(t_0-\varepsilon)$ ist hier negativ $\in (-\pi, 0)$ ✓.

<u>Beispiele</u>: Geodätische Polygone, d.h. ∂V ist Vereinigung von Geodäten, also $\kappa_g = 0$

- Polygon in der Ebene:



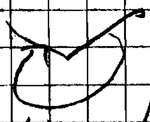
$\sum$ Außenwinkel $= 2\pi$,



(klar, da man die Außenwinkel zu einem Vollwinkel zusammensetzen kann)

Relation zu Innenwinkeln:

$\alpha_i = \pi - \theta_i$ Innenwinkel

(auch bei $\theta_i < 0$:  $\alpha_i > \pi$!)

$\Rightarrow \sum \theta_i = n\pi - \sum \alpha_i$, also $\sum \alpha_i = (n-2)\pi$

Für das Dreieck folgt: $\boxed{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi}$

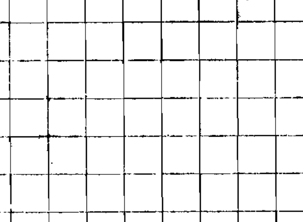
- Polygone auf der Sphäre: $\kappa = 0$, $K = 1$, $\sum \theta_i = n\pi - \sum \alpha_i$

$\Rightarrow \quad vol(V) = \sum \alpha_i - (n-2)\pi$

= Um wieviel $\sum \alpha_i$ größer ist als die Innenwinkelsumme eines ebenen n-Ecks.

Also: $\boxed{\text{Fläche eines geodätischen Polygons auf } S^2 = \text{Winkelüberschuss}}$

Bsp. Oktant

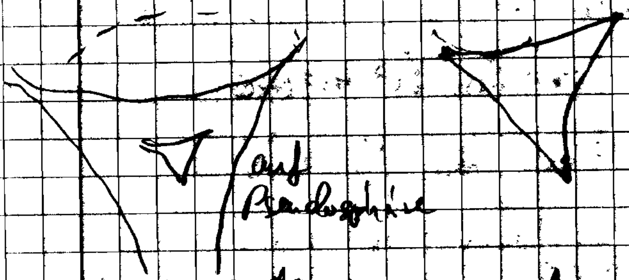


Fläche $= \frac{1}{8} 4\pi = \frac{\pi}{2}$.

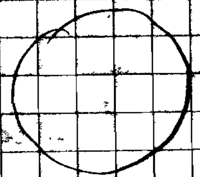
Winkelsumme $= 3 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi$

Bsp: Dreieck auf einer Fläche mit $K < 1$.

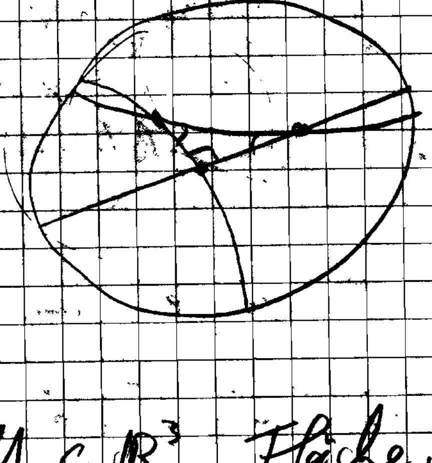
$\sum \alpha_i < \pi$!



(Schwierig zu zeichnen; einfacher mit einer abstrakten Riemannschen Mgf., der hyperbolischen Ebene)

$M =$  , Geodäten = Kreise, die den Rand orthogonal schneiden

(Kreisscheibe)



Folgerung: Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ Fläche, $p \in M$.
Dann gilt

$$K(p) = \lim_{D \to p} \frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\pi}{\mathrm{vol}(D)}$$

wobei der Grenzwert über Dreiecke D genommen wird, mit Innenwinkeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, die "gegen p konvergieren" d.h. in immer kleineren Umgebungen von D enthalten sind.
(Übung: präzisieren Sie diese Grenzwertaussage mathematisch!)

Dies ist eine Charakterisierung von K, die vollständig mit Größen der inneren Geometrie auskommt!

(und zusätzlich sehr „geometrisch" ist, im Unterschied zu den Formeln beim früheren Beweis des Theorema egregium)

Leider ist das kein neuer Beweis des Theorema egregium, da die für diesen hergeleiteten Formeln hier zum Beweis verwendet wurden.

Man kann Gauß-Bonnet aber auch anders beweisen...

(siehe z.B. die Bücher von C. Bär oder von D. Henderson)