

## Der globale Satz von Graß-Bornet

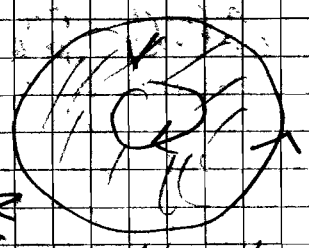
Frage: Gilt der lokale Satz von Graß-Bornet (Version 1 oder 2) auch für allgemeine Felder  $V \in M$  als dort angenommen?

Die Voraussetzungen an  $V$  waren:

- $DV$  ist stückweise glatt.
  - Das sollten wir beibehalten, damit wir von  $Kg$  und von Injektivität sprechen können.
- $V$  liegt in einem Kartengebiet  $U$ , auf dem es orthogonale Koordinaten gibt.
  - Dies war nur nützlich, um die Rechnungen zu vereinfachen. Für die Formulierung der Aussage scheint es irrelevant.
  - Diese Voraussetzung wollen wir fallenlassen.
- $V$  ist einfach zusammenhängend, d.h.  $V = \varphi(\tilde{V})$  mit  $\tilde{V} =$  eine Kurve.
  - Diese Einschränkung wollen wir fallenlassen, allerdings muss dann die Aussage geändert werden.

Dies führt zu interessanten neuen (topologischen) Elementen!

Bsp:  $M = \mathbb{R}^2$ ,  $V =$  Kreisring



Gilt hier auch  $\int_{\partial V} k_y + \int_V k_x \stackrel{?}{=} 2\pi \stackrel{?}{\neq}$

Aber!

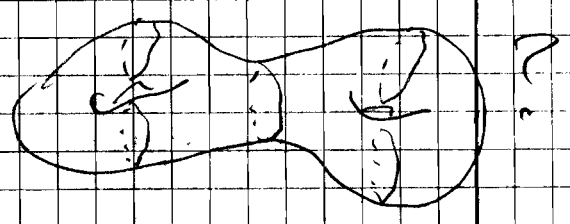
Es ist  $\int_{\text{äußere Kreis}} k = 2\pi$ ,  $\int_{\text{innere Kreis}} k = -2\pi$

Es ist nach Hopf Umlaufzahl, oder mit direkter Rechnung; (Muss sich wegen "falscher" Richtung)

Außerdem  $k = 0$

Also  $\int_{\partial V} k + \int_V k = 0$ , nicht  $2\pi$ !

Was kommt hier allgemein heraus?  
Oder für allgemeine Flächen, z.B.



Im Folgenden ist es einfacher, und natürlicher, abgeschlossene Teilumgebungen  $R \subset M$  statt offene  $V \subset M$  zu betrachten (Relation zum Vorhergehenden:  $R = \bar{V}$ )

Der Rand von  $R$  ist  $\partial R := R - \overset{\circ}{R}$ , wobei

$\overset{\circ}{R} =$  das Innere von  $R$  (als Teilmenge von  $M$ )

ist, d.h.  $\overset{\circ}{R} = \{ p \in R : \text{es gibt eine in } M \text{ offene Umgebung von } p, \text{ die in } R \text{ enthalten ist} \}$

Vorgehensweise: Zerlege  $R$  in kleinere Mengen  $R_j$ , auf die die Voraussetzungen des Satzes zutreffen.

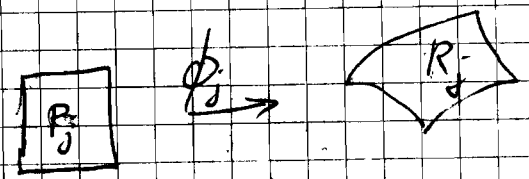
Def. Sei  $M \subset \mathbb{R}^3$  eine Fläche,  $R \subset M$  kompakt mit stückweise glattem Rand.

(d.h.  $\partial R$  ist die endliche Vereinigung der Bilder endlich vieler stückweise glatter einfach geschlossener Kurven).

Eine polygonale Zerlegung von  $R$  ist eine endliche Menge von Teilmengen  $R_j$ ,  $j = 1, \dots, k$  mit:

1)  $R = \bigcup_{j=1}^k R_j$

2) Jedes  $R_j$  ist diffeomorph zu einem kompakten konvexen Polygon in  $\mathbb{R}^2$



(\*) d.h. es gibt ein kompaktes konvexes Polygon  $P_j$  und einen Diffeomorphismus  $\phi_j$  von einer Umgebung von  $P_j$  in  $\mathbb{R}^2$  auf eine Umgebung von  $R_j$  in  $M$

mit  $\phi_j(P_j) = R_j$

- 3) Für  $i \neq j$  ist  $R_i \cap R_j = \emptyset$  oder  $R_i \cap R_j =$  eine gemeinsame Kante oder  $R_i \cap R_j =$  eine gemeinsame Ecke

(\*) Kompaktes konvexes Polygon = konvexe Hülle endlich vieler Punkte in  $\mathbb{R}^2$ .

Bsp: Ist jedes  $P_i$  im  $\mathbb{R}^2$  auch von einer Triangulierung.

Beweis zu den Aussagen

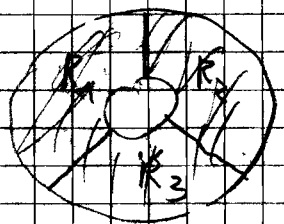
Die Kompaktheit von  $R$  schließt  $P_i \in \mathbb{R}^2$  aus:

$R = M =$  der offene Einheitskreis  $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$   
 $0 < x < 1, y = 0$

nicht erlaubt.

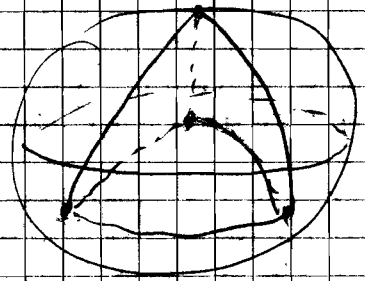
(Diese hätte höchstens eine „unendliche polygonale Zerlegung“, die wir hier nicht betrachten wollen.)

Bsp: • Kreisring  $\subset \mathbb{R}^2$   
 $R$   $M$



Jedes  $R_i$  ist diffeomorph zu einem Quadrat.

•  $R = M = S^2$



Beschreibe einen Tetraeder ein, projiziere die Kanten vom Kugelmittelpunkt auf die Sphäre.

$R_i =$  Bilder der Seitenflächen des Tetraeders

- Analog für beliebige Kompakte Polyeder statt des Tetraeders
- $\rightarrow$  polygonale Zerlegung von  $S^2$ .

Bem. Eine polygonale Zerlegung hat wohldefinierte  
Flächen ( $R_i$ ), Kanten und Ecken.

Satz 3 (Cauchy - Baryer, globale Version):

Sei  $M \subset \mathbb{R}^2$  Fläche,  $R \subset M$  kompakt mit stückweise  
glatten Rand.

Sei  $\{R_1, \dots, R_f\}$  eine polygonale Zerlegung mit  
 $f$  Flächen,  $h$  Kanten und  $e$  Ecken.

Dann gilt

$$(A) \quad \int_{\partial R} \kappa_g + \int_R \kappa_{\text{alt}} \sum \Omega_i = 2\pi (f - h + e)$$

( $\Omega_i =$  Außenwinkel von  $\partial R$ ,  $\partial R$  positiv durchlaufen, d.h.  
so, dass  $R$  immer links liegt.)

Korollar: Sei  $R$  wie im Satz. Dann hängt  $f - h + e$   
nicht von der polygonalen Zerlegung von  $R$  ab.

Bemerkung: Die linke Seite von (A) hängt nicht von  
der Zerlegung ab.

Bem. Man kann zeigen, dass jedes kompakte  $R$  mit  
stückweise glatten Rand eine Triangulierung besitzt  
(siehe Topologie-Bücher)

Def. Sei  $R$  wie oben.  $\chi(R) = f - k + e$

(für eine beliebige polygonale Zerlegung)

heißt Euler-Charakteristik von  $R$

Satz.  $\chi$  ist eine differential-topologische Invariante

D.h. sind  $R, R'$  diffeomorph, so gilt

$$\chi(R) = \chi(R')$$

Bew. Sei  $F: R \rightarrow R'$  ein Diffeomorphismus.

Ist  $\{R_1, R_2\}$  eine polygonale Zerlegung von  $R$ ,

so ist  $\{F(R_1), F(R_2)\}$  eine polygonale Zerlegung von  $R'$ ,

die Kanten auf Kanten und Ecken auf Ecken abbildet

Also sind Flächen-, Kanten- und Eckenzahlen

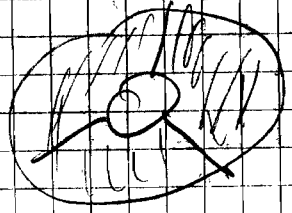
gleich und damit auch  $\chi(R) = \chi(R')$

Bsp. •  $R =$  ein  $n$ -Eck in  $\mathbb{R}^2$

$$f = 1, k = n, e = n$$

$$\chi(R) = 1$$

•  $R =$  Kreisring



$$f = 3$$

$$k = 9$$

$$e = 6$$



$$\Rightarrow \chi(R) = 0$$

•  $R = S^2$  Triangulierung mittels Tetraeder wie oben:

$$f = 4, k = 6, e = 4 \Rightarrow \chi(S^2) = 2$$

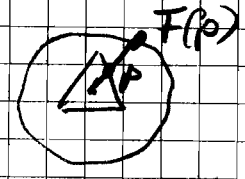
Folgerung: Für jedes konvexes Polyeder in  $\mathbb{R}^3$  gilt:  $f - k + e = 2$

Bem. Man kann zeigen, dass  $\chi$  sogar eine topologische Invariante ist, d.h. sind  $R, R'$  homöomorph, so folgt:  $\chi(R) = \chi(R')$ .

Bsp.:  und  sind homöomorph, aber nicht diffeomorph.

(Ecken bleiben unter Diffeomorphismen erhalten, nicht aber unbedingt unter Homöomorphismen)

Ein Homöomorphismus:



(und entlang jedes Strahls linear:  
 $F(tp) = tF(p)$ ,  
 $0 \leq t \leq 1$ )

Satz 3 sagt also

$$\int_{\partial R} \kappa_g + \int_R \kappa_{dhol} + \sum \Theta_i = 2\pi \chi(R).$$

Folgerung: Sei  $M \subset \mathbb{R}^3$  eine kompakte orientierbare Fläche. Dann gilt

$$\int_M \kappa_{dhol} = 2\pi \chi(M)$$

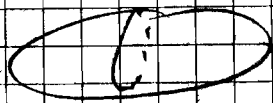
Insbesondere hängt  $\int_M \kappa_{dhol}$  nur vom "Diffeomorphie"-Typ von  $M$  ab

Bew.  $R=M$

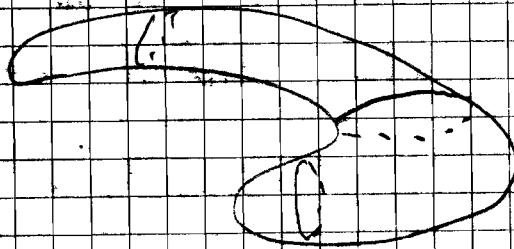
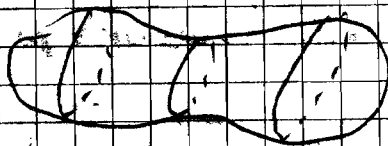
Bsp.  $M=S^2$   $k=1$  Fläche  $=4\pi \rightarrow 4\pi = 2\pi \cdot 2$

$M$  diffeomorph zu  $S^2 \Rightarrow \int k \, dA = 4\pi$

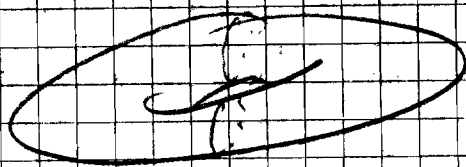
$\mathbb{R} M =$  Ellipsoid



oder ziemlich beliebig

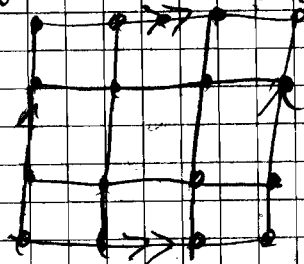


Torus  $T^2$



$\chi(T^2) = 0$

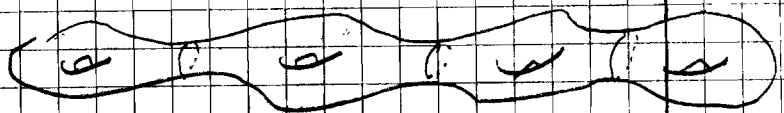
(Übung mittels geeigneter polygonaler Zerlegung,  $\mathbb{R}B$ )



(obere + untere Seite verbleibt, linke + rechte Seite verbleibt)

$f=9, k=18, e=9 \Rightarrow f - k + e = 0$

Bezel mit  $g$  Löchern:  $\mathbb{R}B g=4$



$\chi(M) = 2 - 2g$

(besser schwierigere Übung)



# Beweis des globalen Satzes vom Gauß-Baum

1) Wir nehmen zunächst an, dass die polygonale Zerlegung so feiner ist, dass auf jedes  $R_j$  der lokale Satz vom Gauß-Baum anwendbar ist (Vorsicht!).

Seien  $Q_j$  die Außenwinkel von  $R_j$ .

Dann gilt

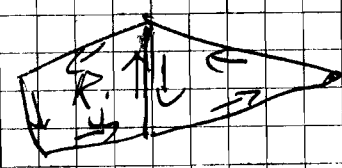
$$\int_{\partial R_j} k_g + \int_{R_j} k_{\text{dial}} + \sum_i Q_{ij} = 2\pi \quad \text{für } j=1, \dots, n$$

Summiere über  $j$ :

$$\text{a) } \sum_j \int_{\partial R_j} k_g + \sum_j \int_{R_j} k_{\text{dial}} + \sum_j \sum_i Q_{ij} = 2\pi n$$

Untersuche jeden der drei Summanden:

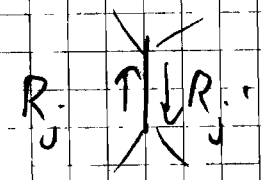
a)  $\sum_j \int_{\partial R_j} k_g$



Schreibe jedes  $\int_{\partial R_j} k_g$  als Summe über die Kanten von  $R_j$ .

Für jede Kante gibt es zwei Möglichkeiten:

- Entweder sie ist gemeinsame Kante von zwei  $R_j$ 's:



Sie wird in  $\int_{\partial R_j}$  und  $\int_{\partial R_{j'}}$

in unterschiedlicher Richtung durchlaufen. Da sich  $k$  bei Umkehren der

Durch Kompaktion von  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}^n$   
sehen sich die kleinen Integrale weg.

- Oder sie ist Kante von genau einem  $R_j$ .  
Dann ist sie Kante von  $R$  (und alle Kanten von  $R$  kommen genau einmal vor).

Also folgt

$$\sum_j \int_{\partial R_j} \omega_g = \int_{\partial R} \omega_g$$

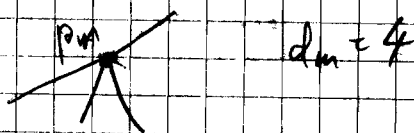
$$b) \sum_j \int_{R_j} k \, dvol = \int_R k \, dvol,$$

da  $R = \bigcup_j R_j$  und sich verschiedene  $R_j$ 's  
nur in Nullmengen überschneiden

$$c) \sum_j \sum_i \theta_{ij}$$

Seien  $p_n, p_e$  die Ecken.

Sei  $d_n$  die Zahl der Kanten, die in  $p_n$  ankommen.



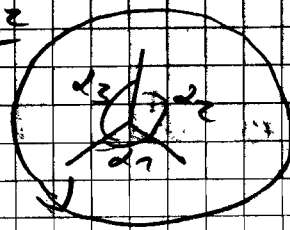
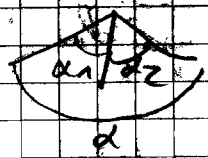
Betrachte eine Ecke, bezeichne die Außenwinkel für den  
Moment mit  $\theta_e$ , die Innenwinkel mit  $\alpha_e$ , den Randausßen-  
winkel mit  $\theta$ , den GesamtInnenwinkel mit  $\alpha$ .

Fall 1 an freie Ecke

Fall 2

innere Ecke (27)

ZB



Fall 1:

Ann  $\vartheta_e = \pi - \alpha_e, \vartheta = \pi - \alpha, \alpha = \sum \alpha_i$

folgt

$$\pi - \vartheta = \sum (\pi - \vartheta_e)$$

$$= (d-1)\pi - \sum \vartheta_e \quad (\text{denn } d \text{ Kanten} \Rightarrow d-1 \text{ Polygone})$$

$$\Rightarrow \sum \vartheta_e = (d-2)\pi + \vartheta$$

Fall 2:  $\sum \alpha_e = 2\pi, \alpha_e = \pi - \vartheta_e$

$$\Rightarrow \sum \vartheta_e = (d-2)\pi \quad (\text{denn hier sind's } d \text{ Polygone})$$

Bem. Eine Kante ~~ist~~ erfüllt im Fall 1.

Hier ist  $\vartheta = 0$ .

Nun ist  $\sum_j \sum_i \vartheta_{ij} = \sum_{m=1}^e (\text{Summe der Außenwinkel bei } p_m)$

$$= \sum_{m=1}^e [(d_m - 2)\pi + \vartheta_m]$$

(mit  $\vartheta_m = 0$  für innere oder Kantedecken)

$$= \left( \sum_{m=1}^e d_m \right) \pi - 2\pi e + \sum \vartheta_m$$

Lemma:  $\sum_{m=1}^e d_m = 2k$

Beweis: Zähle die Paare  $\{(p, v)\}$ :  $p$  Ecke;  $v$  Kante mit  $p \in V$ ;  $z = A$

jedes  $p_m$  gibt es den  $V_s$ , also  $|A| = \sum_{m=1}^n d_m$

Für jedes  $V$  gibt es genau zwei  $p_s$ , also  $|A| = 2k$ .

Aus (a), (b), (c) folgt  $Z_n f =$

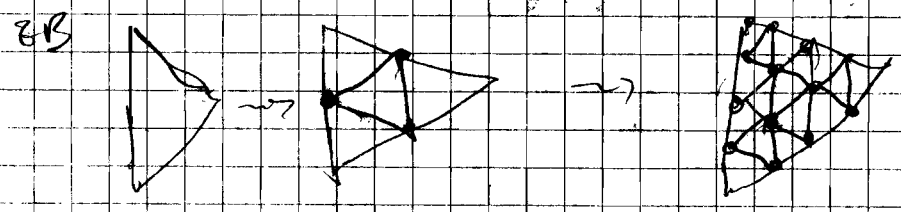
$$= \sum_j \int_{\partial R_j} k_j + \sum_j \int_{R_j} k \, dvol + \sum_i \sum_j \Theta_{ij}$$

$$= \int_{\partial K} k + \int_K k + Z_n h - Z_n e + \sum \Theta_{ij}$$

und damit der Satz.

2) Es bleibt der Fall einer beliebigen polygonalen Zerlegung.

Idee: Verfeinere, d.h. unterteile eine gegebene Zerlegung so weit, dass auf jedes der Teile der lokale Satz von G-B anwendbar ist.



Lemma 1: Sei  $D \subset \mathbb{R}^2$  ein Dreieck und  $\{\tilde{U}_j\}$  eine offene Überdeckung von  $D$ . Dann kann man den oben geregelten Verfeinerungsprozess so lange durchführen (endlich oft), bis jedes der kleinen Dreiecke in einem der  $\tilde{U}_j$  liegt.

Beweis: Wenn nicht, so wähle in der ersten Unterteilung ein Dreieck,  $D_1$ , das in keinem  $\tilde{U}_j$  liegt, dann in der zweiten ein  $D_2$ , dann in der dritten ein  $D_3$  etc.

Seien  $q_1 \in D_1, q_2 \in D_2, \dots$  beliebig.

$D$  kompakt  $\Rightarrow$  die Folge  $\{q_i\}$  hat einen Häufungspunkt  $q$ .

$q$  liegt in einem  $\tilde{U}_{j_0}$ .

$\tilde{U}_{j_0}$  offen  $\Rightarrow \exists \varepsilon$  mit  $K_\varepsilon(q) \subset \tilde{U}_{j_0}$ .

Da der Durchmesser der  $D_i$  gegen Null geht und  $q_i \rightarrow q$

( $i \rightarrow \infty$ ), folgt, dass  $D_i \subset K_\varepsilon(q) \subset \tilde{U}_{j_0}$  gilt

für  $i$  genügend groß.

Widerspruch zur Wahl der  $D_i$ . ▣

Lemma 2: Sei  $\{R_i\}$  eine Triangulierung von  $R$  und  $\{R'_i\}$  eine Verfeinerung, die wie oben beschrieben entsteht (angewendet auf jedes Dreieck).

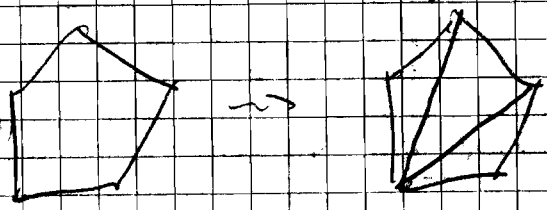
Dann ist  $f$ -h + e für  $\{R_i\}$  und für  $\{R'_i\}$  gleich.

Satz: Es genügt, einen Verfeinerungsschritt zu betrachten.

Hinzufügen einer Ecke erhöht  $h$  und  $e$  jeweils um 1, also bleibt  $f - h + e$  gleich.

Hinzufügen der Kanten innerhalb eines Dreiecks erhöht  $f$  und  $h$  jeweils um 3, also bleibt  $f - h + e$  wieder gleich.

Lemma 3: Selbe Aussage wie in Lemma 2, wenn man eine polygonale Zerlegung durch Hinzufügen von Kanten in eine Triangulierung verfeinert, wie folgt:



Beweis: Mit Hinzufügen jeder Kante erhöht man  $h$  und  $f$  jeweils um 1, also bleibt  $f - h + e$  gleich.

Ende des Beweises des Satzes von Gauß-Barnet.

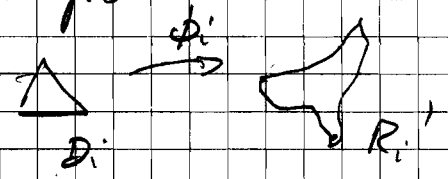
Sei  $\{R_i\}$  eine beliebige polygonale Zerlegung von  $P$ .

Verfeinere  $R_i$  zunächst durch Hinzufügen von Kanten in eine Triangulierung, dann verfeinere diese schrittweise.

(Eigentlich zerlegt man die Polygone  $P_i \subset \mathbb{R}^2$ , aber mittels  $\phi_i: P_i \rightarrow P_i$  wird dies in eine Zerlegung der  $P_i$  überführt.)

zu jedem  $p \in M$  sei  $U_p$  eine Umgebung von  $p$ , auf der es orthogonale Koordinaten gibt.

ist  $R_i = \phi_i(D_i)$  eines der Teile.



so ist  $\{U_p\}$  mit  $U_p := \phi_i^{-1}(U_p)$

eine offene Überdeckung von  $D_i$ .

Nach Lemma 1 gibt es für jedes  $D_i$  eine Zerlegung, so dass jedes kleine Dreieck in ein  $U_p$  passt.

Endlich viele  $D_i \Rightarrow$  kann alle  $D_i$  (also auch  $R_i$ ) simultan so zerlegen, dass in der so entstehenden Triangulierung jedes Teil in einem  $U_p$  enthalten ist

Das erhaltene Triangulierung  $\{R_i''\}$ , auf die Teil 1) des Beweises anwendbar ist.

Nach Lemma 2 + 3 ist der Wert von  $f - h + c$  für  $\{R_i\}$  und für  $\{R_i''\}$  derselbe.

$f = d$