Prof. Dr. Daniel Grieser
Karsten Fritzsch

15.4.2009

Erstes Übungsblatt zur Globalen Analysis

1) **(Die symplektische Form)** Auf $\mathbb{R}^{2n}$ mit den Koordinaten $x^1 \dots, x^{2n}$ betrachten wir die 2-Form

$$\omega = dx^1 \wedge dx^{n+1} + dx^2 \wedge dx^{n+2} + \cdots + dx^n \wedge dx^{2n}.$$

Zeigen Sie, dass $d\omega = 0$ ist und dass

$$\omega^n = \pm n!\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{2n}$$

gilt, wobei $\omega^n := \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ (n Faktoren) sei. Bestimmen Sie auch das Vorzeichen.

Bemerkung: ω heißt auch (standard) *symplektische Form* und ist von fundamentaler Bedeutung in der klassischen Mechanik sowie bei der Behandlung von nicht-linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (Hamilton-Jacobi-Theorie).

(6 Punkte)

2) Zeigen Sie, dass k Linearformen $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ auf einem n-dimensionalen Vektorraum V genau dann linear unabhängig sind, wenn gilt:

$$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \neq 0.$$

(6 Punkte)

3) **(Windungsform und radiale Form)**
Sei

$$F : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},\ (r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

die Polarkoordinatenabbildung. Zeigen Sie

$$F^*\left(\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}\right) = d\theta$$
$$F^*(x\,dx + y\,dy) = r\,dr$$
$$F^*\left(\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}\right) = \frac{dr}{r}$$

(6 Punkte)

4) **(Charakteristisches Polynom und äußere Algebra)**
Sei $A : V \to V$ ein Endomorphismus auf dem n-dimensionalen Vektorraum V. Sei

$$p_A(t) = \det(I + tA) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1}t^{n-1} + a_n t^n.$$

Dies ist fast dasselbe wie das charakteristische Polynom von A. (Was ist die genaue Relation zu diesem?) Damit ist bekannt, dass

$$a_0 = 1,\ a_1 = \operatorname{tr} A,\ a_n = \det A.$$

Die äußere Algebra liefert eine Formel für alle Koeffizienten a_i und damit auch für alle Koeffizienten des charakteristischen Polynoms, und zeigt damit deren Bedeutung:

Sei $A_k^* : \bigwedge^k V^* \to \bigwedge^k V^*$ die lineare Abbildung, die durch Zurückziehen gegeben ist, d.h. $(A_k^*\omega)(v_1, \dots, v_k) = \omega(A(v_1), \dots, A(v_k))$. (bitte wenden)

Zeigen Sie, dass gilt:

$$a_k = \operatorname{tr} A_k^*.$$

Prüfen Sie nach, dass dies in den Fällen $k = 0, 1, n$ mit der vorherigen Aussage übereinstimmt.

(Hinweis: 1. Beweis: (explizit) Sei $V = \mathbb{R}^n$ und sei A als $n \times n$ Matrix $(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ geschrieben und seien $e_1, \dots, e_n$ und $e^1, \dots, e^n$ die Standardbasen von $\mathbb{R}^n$ bzw. $(\mathbb{R}^n)^*$. Für $I \subset \{1, \dots, n\}$ sei A_{II} die Determinante der Matrix $(a_{ij})_{i,j \in I}$ (man nennt A_{II} einen *Hauptminor* von A). Zeigen Sie, dass A_{II} genau der Koeffizient von e^I in der Basisdarstellung von $A^* e^I$ ist und folgern Sie

$$\operatorname{tr} A_k^* = \sum_{|I|=k} A_{II}.$$

Zeigen Sie andererseits $\det(I + tA) = \sum_k t^k \sum_{|I|=k} A_{II}$, indem Sie die Multilinearität von $\det(I + tA) = \det(e_1 + ts_1, \dots, e_n + ts_n)$ verwenden, wobei $s_1, \dots, s_n$ die Spalten von A sind.

2. Beweis: Zeigen Sie die Behauptung zunächst für Diagonalmatrizen, dann für diagonalisierbare Matrizen, dann mit einem Stetigkeitsargument für alle Matrizen.)

(6 Punkte)

Abgabe: Bis 24.4. in der Übung.