Übungen zur Vorlesung:

ANALYSIS AUF MANNIGFALTIGKEITEN I

PD Dr. D. Grieser, A. Wotzke

1. ÜBUNGSBLATT

1 Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Sei $X/\sim = \{[x] \mid x \in X\}$ die Menge der Äquivalenzklassen und $\pi : X \to X/\sim$, $\pi(x) = [x]$.

(a) Die Quotiententopologie auf $X/\sim$ ist definiert durch:

$$U \subset X/\sim \text{ offen } :\Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \text{ offen in } X.$$

Zeigen Sie, dass dies tatsächlich eine Topologie ist.

(b) Zeigen Sie: $\pi : X \to X/\sim$ ist stetig.

(c) Sei $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein weiterer topologischer Raum und $f : X/\sim \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

$$f : X/\sim \to Y \text{ ist stetig} \quad \Leftrightarrow \quad f \circ \pi : X \to Y \text{ ist stetig.}$$

(d) Sei $X = [0,1] \subset \mathbb{R}$ mit der Standardtopologie. Wir definieren

$$s \sim t \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} s = t \text{ oder} \\ s = 0 \text{ und } t = 1, \text{ oder} \\ s = 1 \text{ und } t = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie: $[0,1]/\sim$ mit der Quotiententopologie ist homöomorph zu $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ mit der Standardtopologie.

2 Es sei $S^n = \{x : |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die Sphäre. Die stereographische Projektion vom Nordpol $N = (0, \ldots, 0, 1)$ ist die Abbildung $p_N : S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n \times \{0\}$, die dadurch definiert ist, dass N, x und $p_N(x)$ auf einer Geraden liegen, für jedes x. Analog die stereographische Projektion vom Südpol, p_S.

(a) Zeigen Sie, dass S^n mit diesen beiden Karten eine Mannigfaltigkeit ist.

(b) Zeigen Sie, dass die 'Polarkoordinaten-Abbildung'

$$P : S^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad (\omega, r) \mapsto r\omega$$

glatt ist und einen Diffeomorphismus $S^n \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ definiert.

3 Es sei $0 \leq k \leq n$ und $G_k(\mathbb{R}^n) = \{V \text{ Untervektorraum von } \mathbb{R}^n \mid \dim V = k\}$. Für jede Teilmenge $I = \{i_1 < \cdots < i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$ sei $\pi_I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $x \mapsto (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ und $U_I = \{V \in G_k(\mathbb{R}^n) : \pi_{I|V} : V \to \mathbb{R}^k \text{ ist bijektiv}\}$.

(a) Finden Sie eine Bijektion $\phi_I : U_I \to \mathbb{R}^{k(n-k)}$.

(b) Führen Sie mittels der ϕ_I eine Topologie und die Struktur einer Mannigfaltigkeit auf $G_k(\mathbb{R}^n)$ ein. Welche Dimension hat sie?

(c) $G_1(\mathbb{R}^{n+1})$ heißt auch reeller projektiver Raum, $P\mathbb{R}^n$. Man kann sich diesen auch als Quotient $S^n/\sim$ vorstellen, wobei $x \sim y$ genau dann, wenn $x = y$ oder $x = -y$. Zeigen Sie dazu, dass die Abbildung $S^n \to P\mathbb{R}^n$, $x \mapsto \mathbb{R}x$ überall invertierbares Differential hat und einen Homöomorphismus von $S^n/\sim$ nach $P\mathbb{R}^n$ definiert.

`http://www.math.uni-bonn.de/people/grieser/wwwlehre/AnaMgfk.WS04/`

4 Es seien drei Kreise $\{S_i \mid i = 1, 2, 3\}$ in $\mathbb{R}^2$ gegeben. Zeigen Sie, dass es Punkte $a_i \in S_i$ gibt, so dass der Polygonzug $[a_1 : a_2 : a_3 : a_1] \subset \mathbb{R}^2$ minimale Länge hat, und Punkte $b_i \in S_i$, so dass der Polygonzug $[b_1 : b_2 : b_3 : b_1] \subset \mathbb{R}^2$ maximale Länge hat.