Übungen zur Vorlesung:

Analysis auf Mannigfaltigkeiten I

PD. Dr. D. Grieser, A. Wotzke

2. Übungsblatt

1 Es sei $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ der zwei dimensionale flache Torus. Zeigen Sie, dass das Bild der Kurve

$$t \mapsto (\alpha t, \beta t)$$

für $\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{Q}$ dicht in T^2 liegt.

2

(a) Zeigen Sie mittels des Satzes über den regulären Wert, dass $\mathrm{O}(n)$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n^2}$ der Dimension $\binom{n}{2}$ ist.

(b) Bestimmen Sie den Tangentialraum von $\mathrm{O}(n)$ im Punkte g. Wie lässt sich $T_e\,\mathrm{O}(n)$ geometrisch beschreiben, wobei e das Einselement von $\mathrm{O}(n)$ ist?

3 Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M heißt *orientierbar*, wenn es einen mit der differenzierbaren Struktur verträglichen Atlas $\mathcal{A}_M = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ gibt, so dass die Jacobischen der Kartenwechsel nur positive Werte annehmen. Zeigen Sie, dass für jede differenzierbare Manngifaltigkeit M die Mannigfaltigkeit TM orientierbar ist. Verwenden Sie dabei die in der Vorlesung definierte differenzierbare Struktur $\mathcal{A}_{TM} = \{(\psi_\alpha, U_\alpha \times \mathbb{R}^n) \mid \alpha \in I\}$.

4 Es sei N eine Untermannigfaltigkeit einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M.

(a) Zeigen Sie, dass für jede glatte Funktion f auf N eine glatte Funktion F auf M existiert, so dass $F_{|N} = f$.

(b) Ein *Vektorfeld entlang* N ist eine glatte Abbildung $V : N \to TM$ mit $\pi \circ V = \mathrm{id}_N$, d.h. für jedes $p \in N$ nimmt man einen Vektor $V_p \in T_pM$. Zeigen Sie, dass jedes Vektorfeld entlang N Einschränkung eines Vektorfeldes auf M ist.

(c) (*) Ein Vektorfeld entlang N heißt *transversal*, falls $V_p \notin T_pN$ für alle $p \in N$ ist. Geben Sie ein Beispiel für M, N an, so dass kein transversales Vektorfeld entlang N existiert.