Übungen zur Vorlesung:

Analysis auf Mannigfaltigkeiten I

PD. Dr. D. Grieser, A. Wotzke

3. Übungsblatt

1 Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass die Tensorbündel $\mathrm{Ten}^r_s(M)$ Mannigfaltigkeiten sind.

2 Es sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit der Dimension n und ω eine n-Form auf M mit kompaktem Träger (d.h. $\omega_p = 0$ für p außerhalb einer kompakten Menge). Die folgenden Aufgaben sollen zeigen, dass $\int_M \omega$ 'sinnvoll' definiert ist.

(a) Zeigen Sie, dass die Definition von $\int_M \omega$ unabhängig von der Wahl der verwendeten Überdeckung und Partition der Eins ist.

(b) N sei eine weitere n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $f : N \to M$ ein Diffeomorphismus. Zeigen Sie, dass $f^*\omega$ ebenfalls kompakten Träger hat und dass

$$\int_N f^*\omega = \int_M \omega.$$

3 Zeigen Sie, dass das Möbiusband nicht orientierbar ist.

4 Zeigen Sie folgende gemeinsame Verallgemeinerung der Sätze über die lokale Form von Immersionen und Submersionen:

Es sei $f : M^n \to N^m$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten, deren Differential *konstanten Rang* hat, d.h. für ein $k \leq n, m$ ist Rang $df_p : T_pM \to T_pN = k$ für alle p. Dann ist das Bild von f lokal eine Untermannigfaltigkeit von N (der Dimension k), und f eine Submersion auf sein Bild, genauer:

Für jedes $p \in M$ existiert eine Umgebung U, so dass $V = f(U)$ Untermannigfaltigkeit von N ist; weiterhin existiert eine offene Teilmenge $W \subset \mathbb{R}^{n-k}$ und ein Diffeomorphismus $\kappa : U \to W \times V$ mit $f_{|U} = \mathrm{pr}_V \circ \kappa$.

Alternativ bedeutet dies, dass f lokal äquivalent zu der Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x \mapsto (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ ist.