Übungen zur Vorlesung:

ANALYSIS AUF MANNIGFALTIGKEITEN I

PD. Dr. D. Grieser, A. Wotzke

4. ÜBUNGSBLATT

1 Es sei ω eine 1-Form auf einer Manngifaltigkeit M. Zeigen Sie:

$$\mathrm{d}\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y])$$

für Vektorfelder X, Y.

2 Es seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f\colon M \to N$ eine glatte Abbildung. Zeigen Sie, dass für eine p-Differentialform ω auf N folgendes gilt:

$$f^*(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(f^*\omega).$$

3 Es seien ϕ_t, ψ_t die Flüsse der Vektorfelder X, Y. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) Für alle p und alle $t, s \in (-\varepsilon_p, \varepsilon_p)$ mit $\varepsilon_p > 0$: $\phi_s\psi_t(p) = \psi_t\phi_s(p)$.
(b) Der Kommutator von X und Y verschwindet, d.h., $[X,Y] \equiv 0$.

4

(a) Es sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand ∂U. Definiere die n-Form

$$\omega = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i x_i \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{n+1}.$$

Zeigen Sie

$$\int_{\partial U} \omega = \mathrm{Vol}(U).$$

(b) Zeigen Sie, dass es auf einer geradedimensionalen Sphäre kein Vektorfeld ohne Nullstellen gibt.
Tip: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis, in dem Sie die n-Form ω mittels der Abbildung $f\colon x \mapsto x + \varepsilon X(x)$ zurückziehen, wobei $|X(x)| \equiv 1$ und $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Überprüfen Sie das Verhalten von $\int_{S^n} f^*\omega$ bezüglich ε.
(c) Was folgt daraus für das Tangentialbündel TS^n?