Übungen zur Vorlesung:

Analysis auf Mannigfaltigkeiten I

PD. Dr. D. Grieser, A. Wotzke

5. Übungsblatt

1 Es sei $0 \to C^0 \xrightarrow{d_0} C^1 \xrightarrow{d_1} \ldots \xrightarrow{d_{n-1}} C^n \to 0$ ein Kokettenkomplex, so dass $\dim C^i < \infty$ für alle i. Sei $H^i(C)$ die assoziierte Kohomologiegruppe. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim C^i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim H^i(C)$$

2 **Das 5-Lemma.** Es seien $A_1 \xrightarrow{a_1} A_2 \xrightarrow{a_2} A_3 \xrightarrow{a_3} A_4 \xrightarrow{a_4} A_5$ und $B_1 \xrightarrow{b_1} B_2 \xrightarrow{b_2} B_3 \xrightarrow{b_3} B_4 \xrightarrow{b_4} B_5$ exakte Sequenzen. Weiter seien $f_i \colon A_i \to B_i$ Homomorphismen für $i = 1, \ldots, 5$, so dass $f_{i+1} \circ a_i = b_i \circ f_i$, d.h., dass das folgende Diagramm in jeder Zelle

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{a_1} & A_2 & \xrightarrow{a_2} & A_3 & \xrightarrow{a_3} & A_4 & \xrightarrow{a_4} & A_5 \\ {\scriptstyle f_1}\downarrow{\scriptstyle \cong} & & {\scriptstyle f_2}\downarrow{\scriptstyle \cong} & & {\scriptstyle f_3}\downarrow & & {\scriptstyle f_4}\downarrow{\scriptstyle \cong} & & {\scriptstyle f_5}\downarrow{\scriptstyle \cong} \\ B_1 & \xrightarrow[b_1]{} & B_2 & \xrightarrow[b_2]{} & B_3 & \xrightarrow[b_3]{} & B_4 & \xrightarrow[b_4]{} & B_5 \end{array}$$

kommutiert. Ferner seien f_1, f_2, f_4, f_5 Isomorphismen. Zeigen Sie, dass $f_3 \colon A_3 \to B_3$ dann ebenfalls ein Isomorphismus ist.

3 Berechnen Sie die Kohomologie des 2-Torus und der Kleinschen Flasche, z.B. mittels der Mayer-Vietoris-Sequenz.

4 Machen Sie den Beweis des Poincaré-Lemmas (für $\mathbb{R}^n$) explizit. Das heißt, für eine k-Form ω auf $\mathbb{R}^n$ mit $d\omega = 0$ finden Sie eine explizite Formel für eine $(k-1)$-Form ν mit $\omega = d\nu$. Prüfen Sie nach, dass das Ergebnis im Fall $k = 1$ mit dem bekannten übereinstimmt.