Übungen zur Vorlesung:

Analysis auf Mannigfaltigkeiten I

PD. Dr. D. Grieser, A. Wotzke

7. Übungsblatt

1 Es sei V ein endlich-dimensionaler, euklidischer Vektorraum. Auf der äußeren Algebra $\Lambda^* V^*$ sei für $X \in V$

$$\iota_X : \Lambda^{r+1} V^* \to \Lambda^r V^*$$

definiert durch $\iota_X(\omega)(v_1, \ldots, v_r) = \omega(X, v_1, \ldots, v_r)$. Es sei $X^\# = (X, \cdot)$ die mittels des Skalarprodukts zu $X \in V$ assoziierte Linearform. Zeigen Sie

$$\iota_X \omega = \pm * (X^\# \wedge *\omega).$$

Bestimmen Sie das Vorzeichen. Zeigen Sie auch, dass der zu ι_X adjungierte Operator gerade äußere Multiplikation mit $X^\#$ ist:

$$X^\# \wedge : \Lambda^r V^* \to \Lambda^{r+1} V^*.$$

2 Es sei M eine kompakte, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand. Zeigen Sie, dass Hodge-Laplace Operator Δ und Hodge-Sternoperator kommutieren, d.h.,

$$\Delta * = * \Delta.$$

3 Es sei ω eine n-Differentialform auf einer kompakten, orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit M ohne Rand. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1) Die Differentialform ω ist kogeschlossen, d.h., $\delta\omega = 0$.
2) Es existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so dass $\omega = c\,\mathrm{dvol}$, wobei dvol die Volumenform ist.