

Analysis II

Skript zur Analysis II
Sommersemester 2010
Prof. Dr. Daniel Grieser

Carl von Ossietzky Universität Oldenburg
Institut für Mathematik
26111 Oldenburg
E-Mail: grieser@mathematik.uni-oldenburg.de

Die Homepage zur Vorlesung:

http://www.staff.uni-oldenburg.de/daniel.grieser/wwwlehre/10SS.analysis_2/

Bearbeitung: Uwe Batterham, Hajo Busemann, Rebecca Döll, Stefan Grahl,
Stefan Hellbusch, Andreas Hettler, Robert von Massow,
Roman Rathje, Jörg Sauter, Heike de Vries und Hero Wanders
Titelgestaltung: Christina Roolfs

Veröffentlicht zu den Creative-Commons-Bedingungen    

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/>

Zuletzt bearbeitet: **21. Mai 2010**

Vorwort

Dieses Skript ist im Sommersemester 2006 parallel zur Vorlesung Analysis II unter Mitarbeit von Hörerinnen und Hörern der Vorlesung entstanden. Für die Vorlesung im Sommersemester 2010 habe ich es noch einmal überarbeitet: Einige Beweise, Erklärungen und Beispiele wurden ergänzt, korrigiert oder vereinfacht. Im Lauf der Vorlesung werden sicher noch einige Kleinigkeiten hinzukommen und Fehler verschwinden. Neue Versionen werden Sie auf der Webseite der Vorlesung finden können.

Wie schon beim Analysis I Skript lege ich auch hier großen Wert darauf, neben den präzisen Formulierungen von Definitionen, Sätzen und Beweisen die Hintergründe zu beleuchten: Wie kommt man drauf? Wie kann man sich das vorstellen, was bedeutet es anschaulich? Was ist die Motivation für eine Definition, einen Beweis? Warum ist dieser Satz interessant? Als Beispiel sei hier auf den Überblick über verschiedenste Vorstellungen und Visualisierungen von Abbildungen auf Seite 127 verwiesen.

Für Hinweise auf Druckfehler und für andere Anregungen bin ich immer dankbar. Am besten schreiben Sie mir eine E-Mail (grieser@mathematik.uni-oldenburg.de). Studenten zukünftiger Vorlesungen werden davon profitieren.

Teilnehmer der Vorlesung erhalten eine gedruckte und gebundene Version dieses Skripts. Die elektronische Version ist auf der Webseite verfügbar und hat ein paar Extras, z.B. Farben und Verlinkungen bei Querverweisen.

Ich danke den Studenten, die bei der Erstellung der ersten Version des Skripts mitgearbeitet haben, und insbesondere Andreas Hettler, der sich auch bei dieser Überarbeitung um das ansprechende Design verdient gemacht hat.

Oldenburg, den 16.5.2010

Daniel Grieser

Inhaltsverzeichnis Analysis II

1	Metrische Räume	3
1.1	Definition und Beispiele	4
1.2	Topologische Grundbegriffe: Konvergenz, offene und abgeschlossene Mengen	8
1.3	Vollständigkeit. Der Banachsche Fixpunktsatz	14
1.4	Stetige Abbildungen	20
1.5	Kompakte Mengen	24
2	Kurven und Vektorfelder: Differentialgleichungen als geometrisches Problem	29
2.1	Kurven im \mathbb{R}^n	29
2.2	Vektorfelder und ihre Integralkurven	34
3	Differentialgleichungen erster Ordnung	37
3.1	Der einfachste Fall: $y' = F(x)$	37
3.2	Separation der Variablen	38
3.3	Die lineare Gleichung erster Ordnung	43
4	Lineare Differentialgleichungen	49
4.1	Der Vektorraum der Funktionen	49
4.2	Die homogene lineare Gleichung n -ter Ordnung	52
4.3	Lineare Gleichungen mit konstanten Koeffizienten: Homogene Gleichungen	53
4.4	Konstante Koeffizienten, spezielle Inhomogenitäten	57
4.5	Schwingungen	59
4.6	Die inhomogene lineare Gleichung 2. Ordnung. Die Greensche Funktion	62
5	Differentialgleichungssysteme erster Ordnung	67
5.1	Reduktion beliebiger Differentialgleichungen auf Systeme 1. Ordnung	67
5.2	Lösung von Differentialgleichungssystemen mittels Iteration	68
5.3	Stetige Abhängigkeit von Anfangswerten und Parametern	76
5.4	Integralkurven und Orbits von Vektorfeldern	79
5.5	Lineare Systeme erster Ordnung	84
6	Differentiation von Funktionen mehrerer Variablen	97
6.1	Das Differential und die Richtungsableitung	97
6.2	Eigenschaften differenzierbarer Funktionen	103
6.3	Erste Integrale für Differentialgleichungen	106
6.4	Der Gradient	110
6.5	Höhere Ableitungen	111
6.6	Vertauschen von Differentiation und Integration	121
7	Differentiation von Abbildungen	123
7.1	Definition, einfache Eigenschaften, Beispiele	123

7.2	Der Satz über die Umkehrabbildung	129
7.3	Der Satz über implizite Funktionen	135
A	Überblick: Ableitungskonzepte für Funktionen	142
B	Überblick: Allgemeine Prinzipien für Differentialgleichungen	144

Einleitung

Zentrale Themen der Analysis I waren die reellen Zahlen, die Konvergenz von Folgen reeller Zahlen und damit zusammenhängende Dinge wie Stetigkeit, Ableitung und Integral von Funktionen auf \mathbb{R} . Die reellen Zahlen entsprechen den Punkten der Zahlengerade, diese ist eindimensional.

Die wichtigste Neuerung in der Analysis II ist die Betrachtung höherer Dimensionen. Im Alltag denken wir dabei zunächst an die Ebene (zwei Dimensionen) und den Raum (drei Dimensionen). Mathematisch entsprechen diese dem \mathbb{R}^2 und dem \mathbb{R}^3 .

Hierbei definiert man für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ den **n -dimensionalen reellen Raum** als

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\} = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n\text{-mal}}$$

Dieser tritt in verschiedenen Zusammenhängen auf, zum Beispiel:

- ▷ In der Geometrie.
- ▷ In der Physik; zum Beispiel kann die Position eines Teilchens durch seine drei Koordinaten, also einen Punkt im \mathbb{R}^3 , beschrieben werden. Die Position zweier Teilchen wird durch zwei Punkte im \mathbb{R}^3 oder alternativ durch einen Punkt im \mathbb{R}^6 beschrieben. Es stellt sich heraus, dass die zweite Beschreibung oft nützlicher ist.
- ▷ In anderen Gebieten, wo Mathematik verwendet wird, z. B. in den Wirtschaftswissenschaften. Werden in einem Lager 20 Produkte gelagert, so kann man deren Preise als ein Element von \mathbb{R}^{20} auffassen. Dies ist sinnvoll, da mathematische Operationen Antworten auf reale Fragen geben können. Stellt man etwa den Lagerbestand auch als Element im \mathbb{R}^{20} dar, so ist das Skalarprodukt dieser beiden Vektoren gerade der Gesamtwert der gelagerten Waren.

Das zweite und dritte Beispiel verdeutlichen, warum wir uns nicht nur auf zwei oder drei Dimensionen beschränken.

Die zentralen Themenkomplexe dieser Vorlesung sind die (gewöhnlichen) Differentialgleichungen und die Differentialrechnung von Abbildungen mehrerer Variabler. Beide Themen haben zwei Gesichter: Ein rechnerisches (formales), bei dem Dinge in Formeln ausgedrückt werden, und ein geometrisches. Diese Zweigesichtigkeit ist nicht neu: Die Ableitung einer Funktion war geometrisch als Steigung einer Tangente motiviert, dann haben wir das in eine formale Definition übersetzt und gelernt, damit zu rechnen. Die Konvexität von Funktionen hat zunächst geometrische Bedeutung, diese haben wir in eine formale Definition übersetzt und schließlich durch Rechnung eine Charakterisierung der Konvexität mittels der zweiten Ableitung gefunden.

In mehr Dimensionen wird die geometrische Vielfalt größer. Die mathematische Sprache der einfachsten höherdimensionalen Objekte, der Geraden, Ebenen etc., ist die lineare Algebra. Daher spielt diese in dieser Vorlesung an verschiedenen Stellen eine wichtige Rolle: Zum Beispiel treten Eigenwerte von Matrizen bei den Differentialgleichungen auf, die Multiplikation und die Inversen von Matrizen bei der Differentialrechnung mehrerer Variabler. Auch der allgemeine Begriff des Vektorraums ist nützlich: Sowohl \mathbb{R}^n als auch die Menge der stetigen Funktionen auf einem Intervall sind Vektorräume. Dies ist mehr als eine abstrakte Spielerei: Wir werden weitere Gemeinsamkeiten dieser beiden Mengen – zum Beispiel die Existenz sogenannter Normen, unter denen sie vollständig sind – herausarbeiten. Dann werden wir einen der schönsten Sätze dieser Vorlesung – den Banachschen Fixpunktsatz – auf beide anwenden, und damit zwei der wichtigsten Sätze dieser Vorlesung beweisen: Den Satz über implizite Funktionen und den Satz über die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Differentialgleichungen.

1 Metrische Räume

Bevor wir über Ableitungen in mehreren Dimensionen reden können, müssen wir grundlegende Konzepte, die wir in Analysis I für reelle Zahlen kennengelernt haben, im Kontext des \mathbb{R}^n verstehen: Konvergenz und Stetigkeit.

Erinnern wir uns an die Definition der Konvergenz von Folgen reeller Zahlen:

Seien x, x_k ($k \in \mathbb{N}$) reelle Zahlen. Dann bedeutet $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq k_0$ gilt: $|x_k - x| < \varepsilon$.

Die reellen Zahlen x_k, x kommen hierbei nur in der Kombination $|x_k - x|$ vor. Betrachtet man x_k, x als Punkte auf der Zahlengeraden, so ist $|x_k - x|$ gerade ihr Abstand.

Dies legt nahe, die Konvergenz $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ für mehrdimensionale $x, x_k \in \mathbb{R}^n$ genauso zu definieren, nur dass $|x_k - x|$ als Abstand im \mathbb{R}^n interpretiert wird. Genau das werden wir tun.

Damit kann man sogar von Konvergenz in jedem Kontext reden, wo ein Abstandsbegriff sinnvoll ist. Damit so einfache Dinge wie die Eindeutigkeit des Grenzwertes weiterhin gelten, muss dieser Abstandsbegriff gewissen Regeln genügen. Eine Menge mit einem solchen Abstandsbegriff nennt man metrischen Raum.

Wem der allgemeine Begriff des metrischen Raums zu abstrakt erscheint, kann sich in diesem Kapitel immer den \mathbb{R}^n (oder noch einfacher \mathbb{R} und \mathbb{R}^2) vorstellen.

Warum dann die Allgemeinheit, die Abstraktion? Aus mindestens drei Gründen:

- ▷ Die Abstraktion lenkt den Blick auf das Wesentliche. Dass man Vektoren im \mathbb{R}^n addieren, skalarmultiplizieren und (für $n = 3$) auch »kreuzmultiplizieren« kann, und dass sie durch n -Tupel reeller Zahlen gegeben sind, ist für viele Dinge irrelevant.
- ▷ Für andere Dinge wiederum sind diese Eigenschaften von Vektoren wesentlich. Diese Gruppen von Dingen zu unterscheiden hilft, die Vielfalt mathematischer Wahrheiten im Kopf zu ordnen und sie am Ende besser zu verstehen.
- ▷ Die entwickelten Konzepte werden wir auch auf andere metrische Räume als \mathbb{R}^n anwenden, zum Beispiel auf die Menge stetiger Funktionen auf einem Intervall, mit einem geeigneten Abstandsbegriff. Dies wird es uns erlauben, erstaunliche Sätze zu beweisen, zum Beispiel die Existenz von Lösungen von Differentialgleichungen, auch in Fällen, wo man diese Lösungen nicht hinschreiben kann.

Zugegeben: Die Idee, auch Funktionen als Punkte in einem (riesigen!) Raum zu betrachten, mag zunächst unheimlich erscheinen. Es wird einige Zeit dauern, bis sie Ihnen vertraut wird. Aber glauben Sie mir: Sie bildet einen der Hauptpfeiler der modernen Mathematik. Bisher (in der Analysis I) stecken wir noch tief im 19. Jahrhundert. Mit dieser Idee kommen wir ins 20. Jahrhundert, und damit ja vielleicht auch irgendwann zur Gegenwart...

Also: Je früher Sie anfangen, sich dieser Idee zu nähern, desto besser.

1.1 Definition und Beispiele

1.1.1 Definition

Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Metrik** auf X , falls für alle $p, q, r \in X$ gilt:

- | | | |
|-------|---|---------------------|
| (i) | $d(p, q) \geq 0$, und $d(p, q) = 0$ genau dann, wenn $p = q$ | Definitheit |
| (ii) | $d(p, q) = d(q, p)$ | Symmetrie |
| (iii) | $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$ | Dreiecksungleichung |

X zusammen mit einer Metrik d heißt **metrischer Raum** (X, d) .

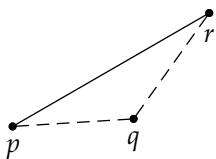


Abbildung 1.1

Man stellt sich $d(p, q)$ als Abstand der Punkte p und q vor. Die erste Bedingung sagt anschaulich, dass ein Abstand nie negativ sein kann und dass zwei nichtidentische Punkte nie den Abstand Null haben können, aber jeder Punkt von sich selbst den Abstand Null hat. Die anschauliche Bedeutung der zweiten Gleichung ist, dass auf dem Hin- und Rückweg der Abstand identisch ist. Die Dreiecksungleichung besagt, dass ein Umweg über einen dritten Punkt nie kürzer sein kann als der direkte Weg (vgl. Abb. 1.1).

sein kann als der direkte Weg (vgl. Abb. 1.1).

Beispiele:

- (1) $X = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} , $d(p, q) := |p - q|$. Die Eigenschaften (i) und (ii) sind unmittelbar klar, (iii) wurde in Analysis I gezeigt.
- (2) $(\mathbb{R}^n, d_{\text{eukl}})$ ist ein metrischer Raum mit $d_{\text{eukl}} := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ wobei $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. d_{eukl} heißt **euklidische Metrik**. Für $n = 2$ sagt der Satz des Pythagoras, dass d_{eukl} gerade der gewohnte Abstands begriff ist.
Die Dreiecksungleichung für d_{eukl} erscheint zwar geometrisch »offensichtlich« (zumindest in zwei Dimensionen), ist aber von der Formel her keineswegs klar und wird später bewiesen.
- (3) $X = \{\text{Städte in Deutschland}\}$, $d(p, q) = \text{Auto-Entfernung von } p \text{ nach } q \text{ gemäß Entfernungstabelle}$.
- (4) $X = \{\text{Städte in Deutschland}\}$, $d_L(p, q) = \text{Entfernung in Luftlinie von } p \text{ nach } q$.

Bemerkung: Die Beispiele zeigen, dass auf derselben Menge verschiedene Metriken existieren (und interessant sein) können. Welche Metrik von Interesse ist, hängt dabei vom Kontext ab (z. B. ob man mit dem Auto fährt oder eine Brieftaube losschickt).

1.1.2 Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $Y \subset X$. Definiere $d|_Y(p, q) := d(p, q)$ für alle $p, q \in Y$. $d|_Y$ heißt die von d auf Y **induzierte Metrik**.

Damit wird z. B. jedes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ selbst zu einem metrischen Raum.

Für die euklidische Metrik gilt $d_{\text{eukl}}(x, y) = d_{\text{eukl}}(x - y, 0)$, d. h. der Abstand von x, y hängt nur von $x - y$ ab. Außerdem hat der doppelte Vektor den doppelten Abstand von Null, und analog für beliebige Vielfache. Metriken mit analogen Eigenschaften kann man auf jedem Vektorraum aus einer sogenannten Norm erhalten:

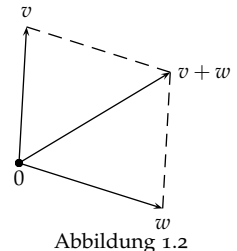
1.1.3 Definition

Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum. Eine Abbildung $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \|v\|$ heißt **Norm**, falls für alle $v, w \in V$ gilt:

- | | | |
|-------|---|---------------------|
| (i) | $\ v\ \geq 0$, und $\ v\ = 0$ genau dann, wenn $v = 0$ | Definitheit |
| (ii) | $\ tv\ = t \cdot \ v\ $ für $t \in \mathbb{R}$ | Homogenität |
| (iii) | $\ v + w\ \leq \ v\ + \ w\ $ | Dreiecksungleichung |

V zusammen mit einer Norm $\| \cdot \|$ heißt **normierter Raum** $(V, \| \cdot \|)$.

Die Dreiecksungleichung ist in Abbildung 1.2 veranschaulicht.

**Beispiele:**

(1) $V = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} , $\|x\| := |x|$.

(2) $V = \mathbb{R}^n$, $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ für $x = (x_1, \dots, x_n)$,

die **euklidische Norm** (die Dreiecksungleichung ist nicht trivial, siehe Satz 1.1.8).

(3) Auf \mathbb{R}^n gibt es weitere Normen, zum Beispiel $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$ und $\|x\|_\infty := \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$. (i)-(iii) sind leicht nachzuprüfen (Übung).

(4) Auf $V = \{\text{beschränkte Funktionen auf } [0, 1]\}$ sei für $f \in V$: $\|f\|_\infty := \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$
die **Supremumsnorm**. Sie wird später für uns sehr wichtig sein.

Die enge Beziehung zwischen euklidischer Norm und euklidischer Metrik lässt sich allgemein formulieren:

1.1.4 Satz

Sei $(V, \| \cdot \|)$ ein normierter Raum. Dann ist $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ mit $d(p, q) = \|p - q\|$ eine Metrik.

Beweis: Es ist nachzuweisen, dass eine Norm die drei Eigenschaften einer Metrik erfüllt:

(i) Die Eigenschaft $d(p, q) \geq 0$ ist klar, denn sie folgt direkt aus der Normdefinition 1.1.3(i). Es ist noch zu zeigen, dass $d(p, q) = 0$ genau dann gilt, wenn $p = q$:

$$d(p, q) = 0 \text{ bedeutet nach Definition } \|p - q\| = 0.$$

Gemäß Normdefinition ist dies äquivalent zu $p - q = 0$, also zu $p = q$.

(ii) Die Eigenschaft folgt unter Verwendung von Def. 1.1.3(ii):

$$d(q, p) = \|q - p\| = \|(-1)(p - q)\| = |-1| \cdot \|p - q\| = d(p, q)$$

(iii) Mit einem »alten Trick« und Definition 1.1.3(iii) erhalten wir:

$$d(p, r) = \|p - r\| = \|(p - q) + (q - r)\| \leq \|p - q\| + \|q - r\| = d(p, q) + d(q, r) \quad \square$$

Wir erinnern an die Definition eines Vektorraums. Hiermit meinen wir vorerst immer einen \mathbb{R} -Vektorraum.

1.1.5 Definition

Ein **\mathbb{R} -Vektorraum** ist eine Menge V , zusammen mit zwei Operationen

$$\begin{aligned} + & : V \times V \rightarrow V & (v, w) & \mapsto v + w \\ \cdot & : \mathbb{R} \times V \rightarrow V & (t, v) & \mapsto t \cdot v = tv \end{aligned}$$

die den folgenden Eigenschaften genügen:

(1) $(V, +)$ ist eine **abelsche Gruppe**, d. h. für alle $v, w, u \in V$ gilt:

$$v + w = w + v \quad \text{Kommutativität}$$

$$(v + w) + u = v + (w + u) \quad \text{Assoziativität}$$

$$\text{Es existiert ein Element } 0 \text{ mit: } v + 0 = v \text{ f. a. } v \in V \quad \text{neutrales Element +}$$

$$\text{Für jedes } v \in V \text{ ex. ein Element } w \text{ mit: } v + w = 0 \quad \text{inverses Element +}$$

(2) Die Skalarmultiplikation \cdot erfüllt für alle $s, t \in \mathbb{R}$, $v, w \in V$ die Eigenschaften:

$$(st) \cdot v = s \cdot (t \cdot v) \quad \text{Assoziativität}$$

$$s \cdot (v + w) = s \cdot v + s \cdot w \quad \text{Distributivität}$$

$$(s + t) \cdot v = s \cdot v + t \cdot v \quad \text{Distributivität}$$

Beispiele:

(1) Sei $V = \mathbb{R}^n$, mit den Operationen: Für $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, $t \in \mathbb{R}$ sei

$$x + y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$t \cdot x := (tx_1, tx_2, \dots, tx_n)$$

$$0 := (0, 0, \dots, 0)$$

(2) Für eine Menge M sei $V = \mathcal{F}(M, \mathbb{R}) := \{\text{Funktionen } f : M \rightarrow \mathbb{R}\}$, mit den Operationen:

Für $f, g \in V, t \in \mathbb{R}$ sind die Funktionen $f + g, t \cdot f, 0$ definiert durch (für alle $p \in M$)

$$(f + g)(p) := f(p) + g(p)$$

$$(t \cdot f)(p) := t \cdot f(p)$$

$$0(p) := 0$$

1.1.6 Satz

Sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum und $W \subset V$. W ist mit denselben Operationen $(+, \cdot)$ ein Vektorraum genau dann, wenn W abgeschlossen unter $+, \cdot$ und nicht leer ist. Abgeschlossen bedeutet:

$$v, w \in W \Rightarrow v + w \in W$$

$$t \in \mathbb{R}, v \in W \Rightarrow t \cdot v \in W$$

In diesem Fall heißt W **Untervektorraum** (oder **Unterraum**) von V .

Beweis: Übung! □

Beispiele:

(1) Sei $\mathcal{B}(M, \mathbb{R}) := \{\text{beschränkte Funktionen } M \rightarrow \mathbb{R}\}$, für eine Menge M . Dies ist ein Untervektorraum von $\mathcal{F}(M, \mathbb{R})$ (Übung).

(2) Sei $C([0,1]) := \{\text{stetige Funktionen } [0,1] \rightarrow \mathbb{R}\}$.

Dann ist $C([0,1])$ ein Untervektorraum von $\mathcal{F}([0,1], \mathbb{R})$. Denn die Summe zweier stetiger Funktionen und das skalare Vielfache einer stetigen Funktion sind wieder stetig, und jede konstante Funktion ist stetig. Da jede stetige Funktion auf $[0,1]$ beschränkt ist (Satz vom Maximum und Minimum), gilt $C([0,1]) \subset \mathcal{B}([0,1])$, und die Supremumsnorm auf $\mathcal{B}([0,1])$ ist damit auch eine Norm auf $C([0,1])$.

Wir wollen nun die Dreiecksungleichung für die euklidische Norm auf \mathbb{R}^n nachprüfen. Für die Rechnung ist es nützlich, die Norm mit Hilfe des Skalarprodukts auszudrücken.

1.1.7 Definition

Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ sei $\langle x, y \rangle := x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$ das **Standardskalarprodukt**.

Oft schreibt man auch (x, y) , das kann aber mit dem Vektor $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ verwechselt werden.

Bemerkung: Es gilt: $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$.

Außerdem ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ **bilinear** und **symmetrisch**, d. h. für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$\langle x, y+z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$, $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$, $\langle x, ty \rangle = t\langle x, y \rangle$, $\langle tx, y \rangle = t\langle x, y \rangle$ und $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

1.1.8 Satz

Auf \mathbb{R}^n sei $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Beweis: Mit der Bemerkung erhalten wir:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

Also:

$$\begin{aligned} \|x+y\| &\leq \|x\| + \|y\| \\ \Leftrightarrow \|x+y\|^2 &\leq (\|x\| + \|y\|)^2 \\ \Leftrightarrow \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\ \Leftrightarrow \langle x, y \rangle &\leq \|x\| \cdot \|y\| \end{aligned}$$

Daher ist der Beweis mit dem folgenden Lemma abgeschlossen. □

1.1.9 Lemma (Cauchy-Schwarz Ungleichung)

Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Beweis: Versuchen Sie es erst selbst! Sie werden merken, dass es nicht ganz einfach ist. Hier ist ein Trick, der vom Himmel zu fallen scheint: Falls $y = 0$, so liegt die Gleichheit vor, ansonsten: Sei $t \in \mathbb{R}$. Dann ist:

$$\begin{aligned} \|x+ty\|^2 &= \langle x+ty, x+ty \rangle = \|x\|^2 + \langle x, ty \rangle + \langle ty, x \rangle + \|ty\|^2 \\ &= \|x\|^2 + t\langle x, y \rangle + t\langle y, x \rangle + t^2\|y\|^2 = \|x\|^2 + 2t\langle x, y \rangle + t^2\|y\|^2 \end{aligned}$$

Wegen $\|x+ty\|^2 \geq 0$ folgt, für alle t ,

$$\|x\|^2 + 2t\langle x, y \rangle + t^2\|y\|^2 \geq 0$$

Nun setzen wir $t := -\frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$:

$$\begin{aligned} \|x\|^2 - 2\frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} + \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^4} \|y\|^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \|x\|^2 - \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 &\geq \langle x, y \rangle^2 \\ \Leftrightarrow \|x\| \cdot \|y\| &\geq |\langle x, y \rangle| \end{aligned}$$

□

Unsere Wahl von t hat eine geometrische Bedeutung:

(Dass die orthogonale Projektion von x auf y wirklich wie angegeben berechnet werden kann, wird in der linearen Algebra gezeigt.)

(Im Bild wird die Notation $((x, y))$ statt $\langle x, y \rangle$ verwendet.)

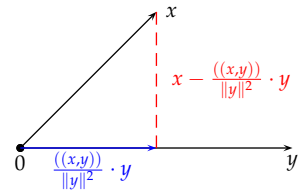


Abbildung 1.3

Bemerkung: Damit haben wir bewiesen, dass die euklidische Norm auf \mathbb{R}^n wirklich eine Norm ist, und damit, dass die euklidische Metrik wirklich eine Metrik ist (mit Satz 1.1.4).

All das lässt sich sofort auf beliebige \mathbb{R} -Vektorräume V verallgemeinern: Ist auf V ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (d.h. eine positiv definite, symmetrische Bilinearform) gegeben, so wird durch $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ eine Norm und durch $d(v, w) := \|v - w\|$ eine Metrik auf V definiert, und die Cauchy-Schwarz Ungleichung gilt. Dies wird genau wie oben bewiesen, da in den Beweisen nirgends verwendet wurde, dass wir vom \mathbb{R}^n gesprochen haben.

1.2 Topologische Grundbegriffe: Konvergenz, offene und abgeschlossene Mengen

In diesem Abschnitt sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir wollen Begriffe wie Konvergenz von \mathbb{R} auf X verallgemeinern. Für die Anschauung (beim ersten Lernen) genügt es, sich $X = \mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Metrik vorzustellen. Wir formulieren die Aussagen aber allgemein, da dadurch deutlich wird, dass wirklich nur die Eigenschaften einer abstrakten Metrik verwendet werden.

Kugeln und Konvergenz

1.2.1 Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $p \in X$ und $0 < r \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$K_r(p) := \{q : d(p, q) < r\}$$

die **offene Kugel** um p mit Radius r .

Beispiele:

- (1) In \mathbb{R}^3 entspricht das dem üblichen Begriff einer Kugel, in \mathbb{R}^2 würde man wohl Kreisscheibe sagen, und in $X = \mathbb{R}$ ist $K_r(p) = (p - r, p + r)$ ein Intervall.

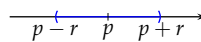


Abbildung 1.4. Kugel in \mathbb{R}

- (2) Sei $X = \mathbb{R}^2$, $d_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty$ mit $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|\}$. Dann ist:

$$K_1((0, 0)) = \{y : \|y\|_\infty < 1\} = \{y : |y_1| < 1, |y_2| < 1\}$$

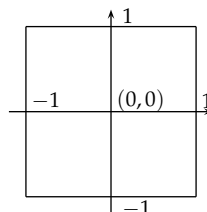


Abbildung 1.5. Die Einheitskugel in (\mathbb{R}^2, d_∞)

Der Beweis der folgenden »offensichtlichen« Aussage zeigt, wie die Eigenschaften einer Metrik zum Einsatz kommen.

1.2.2 Lemma

Seien $p, q \in X, r_1, r_2 > 0$ mit $r_1 + r_2 < d(p, q)$, dann ist $K_{r_1}(p) \cap K_{r_2}(q) = \emptyset$.

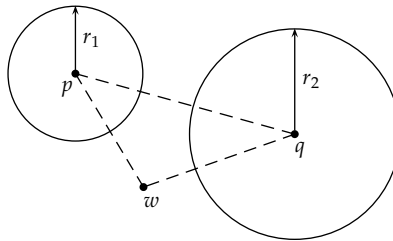


Abbildung 1.6

Beweis: Wir führen den Beweis durch Widerspruch. Angenommen, es gäbe einen Schnittpunkt $w \in K_{r_1}(p) \cap K_{r_2}(q)$, dann wäre $d(p, w) < r_1$ und $d(q, w) < r_2$, aufgrund der Symmetrie also auch $d(w, q) < r_2$. Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir $d(p, q) \leq d(p, w) + d(w, q) < r_1 + r_2$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme $d(p, q) > r_1 + r_2$. □

Konvergenz wird wie in \mathbb{R} definiert, nur dass man $|p_k - p|$ durch $d(p_k, p)$ ersetzt:

1.2.3 Definition (Konvergenz)

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X und $p \in X$.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = p \iff \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} \forall k \geq k_0 : d(p_k, p) < \varepsilon$$

Statt $d(p_k, p) < \varepsilon$ kann man auch $p_k \in K_\varepsilon(p)$ schreiben.

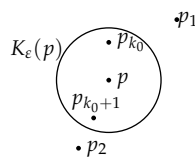


Abbildung 1.7

Beispiele:

- (1) In \mathbb{R} haben wir den gewohnten Konvergenzbegriff.
- (2) Auf $X = C([0, 1])$ sei $\| \cdot \|_\infty$ die Supremumsnorm. Für $f_k \in X (k \in \mathbb{N}), f \in X$ bedeutet dann $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$ (bezüglich der Supremumsnorm) gerade, dass die Funktionenfolge (f_k) gleichmäßig gegen f konvergiert:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f &\iff \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} \forall k \geq k_0 : \sup_{x \in [0, 1]} |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \\ &\iff \sup_{x \in [0, 1]} |f_k(x) - f(x)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \\ &\iff f_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f \text{ gleichmäßig} \end{aligned}$$

Bemerkung: Der Grenzwert (falls existent) ist eindeutig, d. h. aus $p_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} p$ und $p_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} q$ folgt $p = q$. Dies folgt leicht aus Lemma 1.2.2 (Übung).

Offene und abgeschlossene Mengen

Wir betrachten nun Teilmengen metrischer Räume etwas genauer. In Analysis I war für manche Sätze, etwa über stetige Funktionen, wichtig, ob sie auf offenen oder abgeschlossenen Intervallen definiert waren. Was entspricht dem im \mathbb{R}^n bzw. einem abstrakten metrischen Raum? Was sind die Eigenschaften, die für offene bzw. abgeschlossene Intervalle besonders charakteristisch sind?

Es gibt drei Eigenschaften, die eine Rolle spielen:

- (a) abgeschlossene Intervalle enthalten ihre »Randpunkte«, offene nicht;
- (b) abgeschlossene Intervalle $[a, b]$ sind beschränkt;
- (c) Intervalle sind »zusammenhängend«, z. B. im Unterschied zu der Menge $[0, 1] \cup [2, 3]$.

Der Begriff der abgeschlossenen Menge wird (a) entsprechen. Hierzu müssen wir zunächst den Begriff Randpunkt untersuchen. (b) wird im Abschnitt 1.5 zum Begriff der beschränkten Menge führen; einen Zusammenhangsbegriff in metrischen Räumen, der (c) verallgemeinert, gibt es auch (er erlaubt eine Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes), wir werden ihn aber hier nicht betrachten.

1.2.4 Definition

Sei (X, d) metrischer Raum und $M \subset X$.

- | | |
|---|--------------------------|
| (i) $\bar{M} := \{p \in X : \exists_{(p_k) \text{ in } M} : p_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} p\}$ | Abschluss von M |
| (ii) $\overset{\circ}{M} := \{p \in M : \exists_{r > 0} : K_r(p) \subset M\}$ | Inneres von M |
| (iii) $\partial M := \bar{M} \setminus \overset{\circ}{M}$ | Rand von M |

Punkte in $\overset{\circ}{M}$ heißen auch **innere Punkte** von M . Falls p ein innerer Punkt von M ist, nennt man M auch eine **Umgebung** von p .

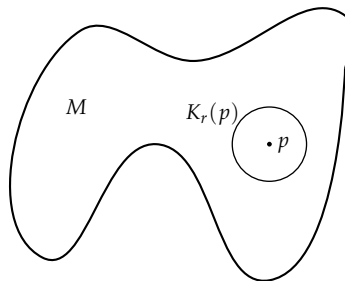


Abbildung 1.8. p ist innerer Punkt von M

Beispiele:

- (1) Seien $X = \mathbb{R}$ und $M = (0, 1]$, dann sind $\bar{M} = [0, 1]$, $\overset{\circ}{M} = (0, 1)$ und $\partial M = \{0, 1\}$.
- (2) Seien $X = \mathbb{R}^2$ und $M = \{(x_1, 0) : x_1 \in \mathbb{R}\}$, dann sind $\bar{M} = M$, $\overset{\circ}{M} = \emptyset$ und $\partial M = M$. Denn jede noch so kleine Kugel (bzgl. des Raumes \mathbb{R}^2 !) mit Mittelpunkt auf M erstreckt sich ein Stück nach oben und unten, liegt also nicht ganz in M .

Bemerkung: Das letzte Beispiel zeigt, dass es wesentlich ist, in welchem (X, d) wir uns gerade bewegen. M ist eine Gerade. »Vergessen« wir, dass wir sie als Teilmenge von \mathbb{R}^2 betrachten und betrachten sie etwa als Teilmenge von M selbst, so ist $\overset{\circ}{M} = M$!

Man kann sich X als »Universum« vorstellen, in dem alle Überlegungen ablaufen. Stellen Sie sich etwa \mathbb{R}^2 als den Lebensraum zweidimensionaler Wesen vor, für die es keine dritte Dimension gibt. Für diese Wesen wäre dann das, was wir Kreisscheibe nennen, gerade analog zu unserer Kugel: Sie ist rund, man kann um sie herum-, aber nicht hineingehen oder hineinsehen.

Literarisch wurde dies von E. A. Abbott in seinem Buch Flatland umgesetzt. Für Flächenwesen ist die Gerade unendlich dünn; sie hat kein Inneres; für eindimensionale Geradenwesen aber schon!

Für alle Mengen $M \subset X$ gilt $\overset{\circ}{M} \subset M \subset \overline{M}$. Für die beiden Extremfälle gibt es Namen:

1.2.5 Definition

Sei (X, d) metrischer Raum.

$M \subset X$ heißt **abgeschlossen**, falls $M = \overline{M}$, d. h.:

Für alle Folgen (p_k) in M , die gegen ein $p \in X$ konvergieren, ist schon $p \in M$.

$M \subset X$ heißt **offen**, falls $M = \overset{\circ}{M}$, d. h.:

Für alle $p \in M$ existiert ein $r > 0$ mit $K_r(p) \subset M$.

Nach der Definition des Randes: M abgeschlossen $\Leftrightarrow M$ enthält *alle* seine Randpunkte.

M offen $\Leftrightarrow M$ enthält *keinen* seiner Randpunkte.

Beispiele:

- (1) $X = \mathbb{R}$. $[0, 1]$ ist abgeschlossen, $(0, 1)$ ist offen.

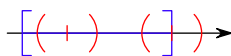


Abbildung 1.9. Intervall $[0, 1]$ mit innerem und äußerem Punkt

- (2) $X = \mathbb{R}$. $[0, \infty)$ ist abgeschlossen, denn sei (p_k) eine Folge in $[0, \infty)$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = p \in \mathbb{R}$, dann folgt $p \in [0, \infty)$.

- (3) $X = \mathbb{R}$. $[0, 1)$ ist weder offen noch abgeschlossen.

- (4) Für jeden metrischen Raum (X, d) ist $M = X$ sowohl offen als auch abgeschlossen. $M = \emptyset$ ebenso.

- (5) $X = [0, \infty)$ mit der von \mathbb{R} induzierten Metrik, $M = [0, 1)$. Dann ist $\overset{\circ}{M} = [0, 1) = M$, also ist M offen in X ! Denn $K_1(0) = \{x \in X : |x - 0| < 1\} = [0, 1) \subset M$, also ist 0 innerer Punkt von M . Im »Universum« X existieren keine Punkte $x < 0$!

Beachte: M ist nicht offen als Teilmenge von \mathbb{R} . Man sagt auch, $[0, 1)$ ist **offen relativ zu** $[0, \infty)$.

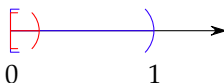


Abbildung 1.10. Intervall $[0, 1)$ als Teilmenge von $X = [0, \infty)$

1.2.6 Lemma

In jedem metrischen Raum sind die Kugeln $K_r(p)$ offen.

Beweis: Sei $q \in K_r(p)$, also $d(q, p) < r$. Setze $s = r - d(q, p)$. Dann ist $K_s(q) \subset K_r(p)$, denn $w \in K_s(q) \Rightarrow d(w, q) < s = r - d(q, p) \Rightarrow d(w, p) \leq d(w, q) + d(q, p) < r$. □

Bei der Bestimmung des Randes einer Menge ist folgende Charakterisierung oft nützlich:

1.2.7 Satz

Sei (X, d) metrischer Raum und $M \subset X$. Dann gilt:

$\partial M = \{p \in X : \text{jede Kugel um } p \text{ schneidet sowohl } M \text{ als auch } M^c\}$

(M^c ist das Komplement von M in X , also $M^c = X \setminus M$.)

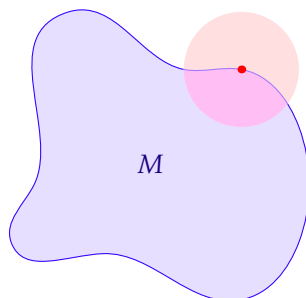


Abbildung 1.11

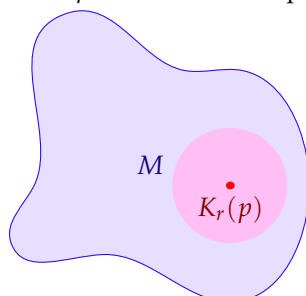
Beweis: 1. $\supset\subset$: Sei $p \in \partial M$. Wir zeigen: $p \in \langle \text{rechte Seite} \rangle$.

Sei $r > 0$. Wir müssen zeigen: $K_r(p) \cap M \neq \emptyset$ und $K_r(p) \cap M^c \neq \emptyset$.

Wegen $p \in \partial M = \overline{M} \setminus \overset{\circ}{M} \subset \overline{M}$ gibt es $x_n \in M$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$. Also gibt es n_0 , so dass für $n \geq n_0$ gilt: $x_n \in K_r(p)$ (Konvergenzdefinition mit $\varepsilon = r$). Also $x_{n_0} \in K_r(p) \cap M$.

Beweis von $K_r(p) \cap M^c \neq \emptyset$: Indirekt.

Falls $K_r(p) \cap M^c = \emptyset$, dann $K_r(p) \subset M$, also $p \in \overset{\circ}{M}$, im Widerspruch zu $p \in \partial M = \overline{M} \setminus \overset{\circ}{M}$.

Abbildung 1.12. p liegt nicht im Rand

2. $\supset\subset$: Sei $p \in \langle \text{rechte Seite} \rangle$. Zu zeigen: $p \in \partial M$, d. h. $p \in \overline{M}$ und $p \notin \overset{\circ}{M}$.

1. $p \in \overline{M}$: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $K_{1/n}(p) \cap M \neq \emptyset$. Wähle einen Punkt x_n in dieser Menge. Dann ist

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$ wegen $d(x_n, p) < \frac{1}{n} \rightarrow 0$, und $x_n \in M$ für alle n . Also folgt $p \in \overline{M}$.

2. $p \notin \overset{\circ}{M}$: Falls $p \in \overset{\circ}{M}$ wäre, so gäbe es ein $r > 0$ mit $K_r(p) \subset M$, also $K_r(p) \cap M^c = \emptyset$, im Widerspruch zur Annahme. \square

1.2.8 Korollar

$\partial M = \partial(M^c)$.

Beweis: Dies folgt sofort aus Satz 1.2.7, da die Bedingung an p auf der rechten Seite symmetrisch bezüglich M und M^c ist. \square

Im praktischen Umgang mit offenen und abgeschlossenen Mengen sind die beiden folgenden Sätze oft nützlich.

1.2.9 Satz

Sei (X, d) metrischer Raum und $M \subset X$. Dann gilt:
 M ist offen $\iff M^c$ ist abgeschlossen.

Beispiel: $X = \mathbb{R}$, $M = (0, 1)$ ist offen, $M^c = (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$ ist abgeschlossen.

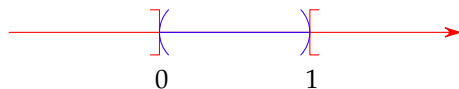


Abbildung 1.13. M und M^c

Beweis: M offen $\iff M \cap \partial M = \emptyset \iff M \cap \partial(M^c) = \emptyset \iff M^c \supset \partial(M^c) \iff M^c$ abgeschlossen. □

1.2.10 Satz

- (1) Die Vereinigung beliebig vieler (unendlich viele möglich) offener Mengen ist offen.
- (2) Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.

Bei abgeschlossenen Mengen verhält es sich genau andersherum, es gilt nämlich:

- (1) Der Durchschnitt beliebig vieler (unendlich viele möglich) abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
- (2) Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

In der jeweils zweiten Aussage ist es wesentlich, dass nur endlich viele Mengen zugelassen sind.

Beispiele:

- (1) $X = \mathbb{R}$, $M_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$. Alle M_n sind offen, aber
 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n = \{p \in \mathbb{R} : p \in M_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\} = \{0\}$ ist nicht offen.

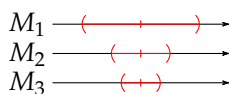


Abbildung 1.14

- (2) $X = \mathbb{R}$, $M_n = [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$, $n \in \mathbb{N}$. Alle M_n sind abgeschlossen, aber
 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n = \{p \in \mathbb{R} : p \in M_n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\} = (0, 1)$ ist nicht abgeschlossen.

Beweis:

- (1) Seien M_i , $i \in I$ (I beliebige Menge) offene Teilmengen von X .

$$M = \bigcup_{i \in I} M_i = \{p \in X : p \text{ liegt in mindestens einem } M_i\}$$

Behauptung: M ist offen. Beweis: Sei $p \in M$, d. h. es existiert $i_0 \in I$ mit $p \in M_{i_0}$. M_{i_0} offen, somit $\exists r > 0$ mit $K_r(p) \subset M_{i_0}$. Dann folgt $K_r(p) \subset M$, weil $M_{i_0} \subset M$.

- (2) Seien M_1, \dots, M_n offen und $M = \bigcap_{i=1}^n M_i$. Sei $p \in M$.

Dann gilt für jedes $i = 1, \dots, n$: $p \in M_i$, und da M_i offen ist, gibt es $r_i > 0$ mit $K_{r_i}(p) \subset M_i$. Setze $r = \min_{i=1, \dots, n} r_i$. Dann ist $r > 0$ und $K_r(p) \subset K_{r_i}(p) \subset M_i$ für jedes i , also $K_r(p) \subset M$.

Damit ist gezeigt, dass M offen ist.

Die Behauptungen über abgeschlossene Mengen erhält man aus denen über offene Mengen mittels Komplementbildung, mit Hilfe von Satz 1.2.9 und den De Morgan'schen Regeln (Schnitt und Vereinigung werden bei Komplementbildung vertauscht). \square

Frage: An welcher Stelle funktioniert der Beweis von (2) nicht für unendlich viele Mengen? (Übung!)

In Satz 1.2.10 (1) sind auch überabzählbar viele Mengen zugelassen. Als Beispiel dafür, dass dies nützlich sein kann, beweisen wir folgende Charakterisierung relativ offener Mengen:

1.2.11 Satz

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $Y \subset X$ und $d|_Y$ die induzierte Metrik. Sei $M \subset Y$. Dann sind äquivalent:

- (i) M ist offen relativ zu Y , das heißt im metrischen Raum $(Y, d|_Y)$.
- (ii) Es gibt eine in (X, d) offene Menge $M' \subset X$ mit $M = Y \cap M'$.

Beweis: Zur Verdeutlichung schreiben wir Kugeln in (X, d) als $K_r^X(p)$ und Kugeln in $(Y, d|_Y)$ als $K_r^Y(p)$. Zunächst bemerken wir, dass für $p \in Y, r > 0$ gilt: $K_r^Y(p) = Y \cap K_r^X(p)$. Dies folgt direkt aus den Definitionen von Kugel und induzierter Metrik.

Beweis von (ii) \Rightarrow (i): $p \in M \Rightarrow p \in M' \xrightarrow{M' \text{ offen}} \exists_{r>0} K_r^X(p) \subset M'$. Für dieses r ist dann $K_r^Y(p) = Y \cap K_r^X(p) \subset Y \cap M' = M$. Also ist M offen relativ zu Y .

Beweis von (i) \Rightarrow (ii): Zu jedem $x \in M$ wähle ein $r_x > 0$ mit $K_{r_x}^Y(x) \subset M$. Setze $M' = \bigcup_{x \in M} K_{r_x}^X(x)$. Als Vereinigung offener Mengen ist M' offen (in X). Außerdem gilt:

$$Y \cap M' = Y \cap \bigcup_{x \in M} K_{r_x}^X(x) = \bigcup_{x \in M} (Y \cap K_{r_x}^X(x)) = \bigcup_{x \in M} K_{r_x}^Y(x) = M$$

Die letzte Gleichheit gilt, da jedes $x \in M$ in der Vereinigung links vorkommt und andererseits jede der Kugeln links innerhalb von M liegt. \square

1.3 Vollständigkeit. Der Banachsche Fixpunktsatz

Vollständigkeit

Eine der wichtigsten Eigenschaften von \mathbb{R} war die Vollständigkeit. Ohne sie könnten wir keine Wurzeln ziehen, gälte der Zwischenwertsatz und der Satz vom Maximum und Minimum nicht, könnten wir keine Reihen summieren und nicht integrieren.

Gibt es einen Vollständigkeitsbegriff für \mathbb{R}^n oder allgemeinere metrische Räume (X, d) ? Die Vollständigkeit von \mathbb{R} war definiert als Gültigkeit des Supremumsaxiom. Dieses bezieht sich auf die Anordnung von \mathbb{R} . Aber \mathbb{R}^n ist nicht angeordnet, ganz zu schweigen von X . Was tun?

Unter den vielen Sätzen, die wir mittels der Vollständigkeit bewiesen haben, waren einige, die sogar äquivalent zur Vollständigkeit sind, d. h. wenn man einen von diesen statt des Supremumsaxiom als Axiom nähme, so könnte man das Supremumsaxiom als Satz herleiten. Ein solcher Satz ist: Jede Cauchy-Folge konvergiert. Dies läßt sich auf metrische Räume verallgemeinern, da die Begriffe Cauchy-Folge und Konvergenz nur mit Hilfe des Punktabstands definiert sind!

1.3.1 Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum und (x_n) eine Folge in X . (x_n) heißt **Cauchy-Folge** $:\Leftrightarrow$ Für alle $\varepsilon > 0$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \geq n_0$ gilt: $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Also wieder 100% analog zu Analysis I.

1.3.2 Definition

(X, d) heißt **vollständig** : \Leftrightarrow Jede Cauchy-Folge in X konvergiert (gegen ein Element aus X).

Beispiele:

- (1) $X = \mathbb{R}$ ist vollständig.
- (2) $X = \mathbb{Q}$ ist nicht vollständig.
- (3) $[0, 1]$ ist vollständig.
- (4) $X = [0, 1)$ ist nicht vollständig: $x_n = 1 - \frac{1}{n}$.

In den beiden letzten beiden Beispielen wurde das Intervall als eigenständiger metrischer Raum (mit der induzierten Metrik, wie immer) betrachtet. Worauf es ankommt, ist, dass es einen Grenzwert in X gibt.

Bemerkung: Vollständigkeit ist ein **intrinsischer** Begriff. Das heißt: Sei (X, d) ein metrischer Raum, $Y \subset X$ und $d|_Y$ die induzierte Metrik auf Y . Ob $(Y, d|_Y)$ vollständig ist, hängt nur von Y und $d|_Y$ ab, nicht von X .

Im Unterschied dazu sind Offenheit und Abgeschlossenheit **extrinsische** Begriffe, sie hängen davon ab, was der »umgebende Raum« X ist. Dies folgt sofort aus den Definitionen und den früheren Beispielen.

Trotzdem läßt sich Vollständigkeit von Teilmengen manchmal extrinsisch charakterisieren.

1.3.3 Satz

Sei (X, d) vollständig. Sei $Y \subset X$, $d|_Y$ die induzierte Metrik auf Y .

$(Y, d|_Y)$ ist vollständig $\Leftrightarrow Y$ ist abgeschlossen als Teilmenge von X

Zum Beispiel ist jedes abgeschlossene Intervall vollständig.

Beweis: Übung. □

Bevor wir weitere Beispiele vollständiger metrischer Räume kennenlernen, behandeln wir einen der schönsten Sätze dieser Vorlesung.

Der Banachsche Fixpunktsatz

Haben Sie schon einmal gelangweilt vor Ihrem Taschenrechner gesessen und immer wieder dieselbe Taste gedrückt? Wenn dies zum Beispiel die Kosinustaste war, haben Sie vielleicht bemerkt, dass sich der Wert in der Anzeige immer mehr einer Zahl annäherte und schließlich (wegen der endlichen Rechengenauigkeit) gleich blieb (0,73908..., oder 0,99984... falls Sie Winkel in Grad messen). Und noch erstaunlicher: Egal, welche Zahl am Anfang im Display stand, der Grenzwert ist immer derselbe.

Wie kommt das? Welche Bedeutung hat der Grenzwert?

Die zweite Frage läßt sich leicht beantworten: Wenn eine Zahl x unter Anwendung von \cos gleich bleibt, erfüllt sie die Gleichung

$$\cos x = x .$$

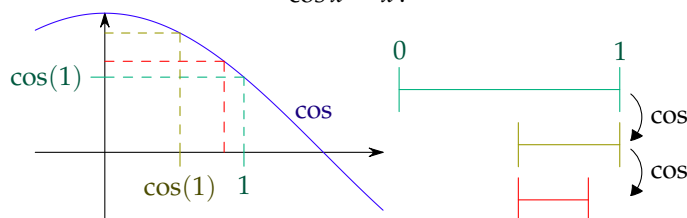


Abbildung 1.15. Mehrfache Anwendung von \cos

1.3.4 Definition

Sei X eine Menge und $T : X \rightarrow X$ eine Abbildung. $p \in X$ heißt **Fixpunkt** von T , falls $T(p) = p$.

Nun zur ersten Frage. Sei x_0 die Zahl, die am Anfang im Display steht. Durch wiederholtes Drücken der \cos -Taste erhält man nacheinander

$$x_1 = \cos x_0, \quad x_2 = \cos x_1 = \cos(\cos x_0), \quad x_3 = \cos x_2 = \cos(\cos(\cos x_0)), \quad \dots$$

Hierfür zunächst eine allgemeine Notation:

1.3.5 Definition

Sei X eine Menge und $T : X \rightarrow X$ eine Abbildung. Zu $n \in \mathbb{N}$ ist die **n -te Iterierte** von T die Abbildung

$$T^n = \underbrace{T \circ \dots \circ T}_{n\text{-mal}} : X \rightarrow X.$$

Mit anderen Worten: Für $x \in X$ ist $T^n(x)$ induktiv definiert durch

$$\begin{aligned} T^1(x) &= T(x) \\ T^{n+1}(x) &= T(T^n(x)) \end{aligned}$$

Vorsicht! $T^n(x)$ ist nicht dasselbe wie $T(x)^n$, die n -te Potenz von $T(x)$ (die nur für $X = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} definiert ist). Leider schreibt man zum Beispiel für $(\cos(x))^2 = \cos(x) \cdot \cos(x)$ auch manchmal $\cos^2(x)$. Dann muss man aus dem Kontext erschließen, ob hiermit die Iterierte, also $\cos(\cos(x))$, oder die Potenz gemeint ist.

Bemerkung: Die Theorie der **dynamischen Systeme** untersucht, wie sich Iterierte T^n von Abbildungen für $n \rightarrow \infty$ verhalten. Hierbei treten viele faszinierende Phänomene auf, z. B. Chaos und Fraktale.

Wir betrachten hier nur äußerst »zahme« Abbildungen, die Kontraktionen. Bei ihnen tritt kein Chaos auf.

1.3.6 Definition

Sei (X, d) metrischer Raum und $T : X \rightarrow X$ eine Abbildung. T heißt **Kontraktion**, falls es ein $0 < L < 1$ gibt, so dass $\forall x, y \in X$ gilt: $d(Tx, Ty) \leq L \cdot d(x, y)$.

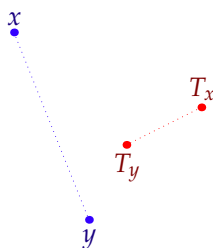


Abbildung 1.16. Kontraktion

Das heißt, T verkürzt Abstände mindestens um den Faktor L . Es ist wesentlich, dass dasselbe $L < 1$ für alle x, y funktioniert (ähnlich wie beim Wurzelkriterium für Reihen dasselbe $q < 1$ für alle $\sqrt[n]{|a_n|}$ funktionieren, d. h. $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ erfüllen muss).

Der folgende Satz gibt eine einfache Methode, für Funktionen im Reellen die Kontraktionseigenschaft nachzuprüfen:

1.3.7 Satz

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei $L \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

- (i) Für alle $x, y \in I$ gilt: $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$.
- (ii) Für alle $x \in I$ gilt: $|f'(x)| \leq L$.

Beweis: Beweis von (ii) \Rightarrow (i): Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein ξ zwischen x und y mit $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$, also $|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y|$. Nach (ii) ist $|f'(\xi)| \leq L$, und das gibt die Behauptung. Beweis von (i) \Rightarrow (ii): Indirekt. Wäre $|f'(x_0)| > L$ für ein $x_0 \in I$, so folgte aus der Definition der Ableitung und Eigenschaften von Grenzwerten, dass $\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| > L$ für ein $x \in I$ nahe x_0 wäre. Das hieße aber $|f(x) - f(x_0)| > L|x - x_0|$, im Widerspruch zur Annahme (i). \square

Beispiel: Für $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$ für alle x, y , da $\cos' = -\sin$ und $|\sin x| \leq 1$ für alle x ist. Aber \cos ist keine Kontraktion, da man hier 1 nicht durch eine kleinere Zahl ersetzen kann.

Betrachten wir aber $\cos : I \rightarrow I$ mit $I = [-1, 1]$, so ist dies eine Kontraktion: Da \sin auf I monoton wächst (wegen $-\frac{\pi}{2} < -1 < 1 < \frac{\pi}{2}$ und $\sin' = \cos > 0$ auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$), gilt $\sin(-1) \leq \sin x \leq \sin 1$ und damit $|\sin x| \leq \sin 1$ für $x \in I$, also kann man $L = \sin 1$ wählen, das ist kleiner als eins.

(Als erstes muss man natürlich prüfen, dass das Bild von \cos wirklich in I enthalten ist. Dies ist klar, da $|\cos x| \leq 1$ für alle x ist.)

1.3.8 Satz (Banachscher Fixpunktsatz)

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $T : X \rightarrow X$ eine Kontraktion.

- (1) T hat genau einen Fixpunkt p .
- (2) Sei $x_0 \in X$ beliebig und die Folge (x_n) definiert durch $x_{n+1} = Tx_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$.

Beweis: Eindeutigkeit des Fixpunktes:

Sei $Tp = p, Tq = q$. Dann $d(p, q) = d(Tp, Tq) \leq Ld(p, q)$, $L < 1 \Rightarrow d(p, q) = 0 \Rightarrow p = q$.

Nun zeigen wir: Konvergiert die in (2) definierte Folge (x_n) gegen ein p , so ist p ein Fixpunkt.

Beweis: $Tp = T(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \stackrel{T \text{ stetig}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = p$.

Dass Kontraktionen stetig sind, werden wir im Abschnitt 1.4 zeigen.

Es bleibt nachzuprüfen, dass die Folge (x_n) konvergiert. Hierzu zeigen wir, dass (x_n) eine Cauchy-Folge ist.

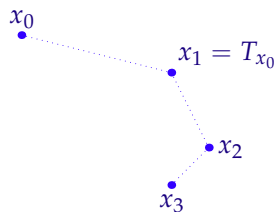


Abbildung 1.17. Mehrfachanwendung einer Kontraktion

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq Ld(x_n, x_{n-1})$. Wiederholte Anwendung ergibt $d(x_{n+1}, x_n) \leq Ld(x_n, x_{n-1}) \leq L^2d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \dots \leq L^n d(x_1, x_0)$.

Für $k \in \mathbb{N}$ folgt aus der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\leq d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + d(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq (L^{n+k-1} + L^{n+k-2} + \dots + L^n) d(x_1, x_0), \text{ also} \\ d(x_{n+k}, x_n) &\leq L^n \underbrace{(1 + L + L^2 + \dots + L^{k-1})}_{\leq \sum_{i=0}^{\infty} L^i = \frac{1}{1-L}} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Wegen $0 < L < 1$ ist (L^n) und damit $\left(\frac{L^n}{1-L} d(x_1, x_0)\right)$ eine Nullfolge, also existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0 mit $\frac{L^n}{1-L} d(x_1, x_0) < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Also folgt $d(x_{n+k}, x_n) < \varepsilon$ für $n \geq n_0$ und alle $k \in \mathbb{N}$.

Also ist (x_n) Cauchy-Folge und damit wegen der Vollständigkeit von X konvergent. \square

Beispiel: $\cos : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$. Das Intervall $[-1, 1]$ ist nach Satz 1.3.3 vollständig, und \cos ist eine Kontraktion, wie wir nach Satz 1.3.7 sahen. Dies erklärt das Taschenrechnerphänomen vom Beginn dieser Sektion und zeigt auch, dass die Gleichung $\cos x = x$ im Intervall $[-1, 1]$ genau eine Lösung x hat. Für die Konvergenz $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ muss der Startwert x_0 nicht unbedingt in $[-1, 1]$ liegen, sondern kann eine beliebige reelle Zahl sein. Denn $x_1 = \cos x_0$ liegt in $[-1, 1]$, dann greift der Satz.

Beispiel: Hat man zwei Landkarten verschiedenen Maßstabs, die dasselbe Gebiet abbilden, und legt man die kleinere so auf die größere, dass sie am Rand nirgends übersteht, so gibt es genau einen Ort, dessen Darstellungen in den beiden Karten genau übereinanderliegen.

Man findet ihn so, dass man (z. B. für Europakarten) irgendwo, etwa in Rom, auf der großen Karte anfängt, nachsieht, welcher Ort auf der kleineren Karte direkt darüber liegt (sagen wir Kleinkleckersdorf), dann Kleinkleckersdorf auf der großen Karte sucht, nachsieht, welcher Ort auf der kleinen Karte darüber liegt etc.

Hier ist X die größere Karte, und T bildet einen Punkt auf der größeren Karte auf den entsprechenden Punkt der kleineren Karte ab. Da die kleinere ganz auf der größeren liegt, kann man T als Abbildung $X \rightarrow X$ auffassen. T ist eine Kontraktion wegen der verschiedenen Maßstäbe. Also hat T genau einen Fixpunkt, und man findet ihn durch Iteration von T .

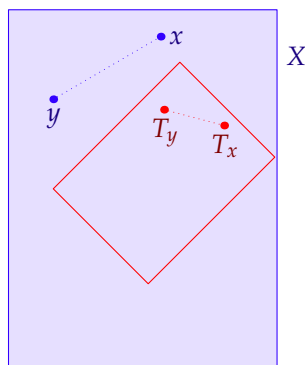


Abbildung 1.18. Europa-Landkarte

Bemerkung: In diesem Beispiel kann der Fixpunkt sogar explizit berechnet werden, mit Mitteln der linearen Algebra: Angenommen, der Koordinatennullpunkt ist die untere linke Ecke der großen Karte, so dass diese im ersten Quadranten liegt. Bezeichnet $t < 1$ das Verhältnis der Maßstäbe, ϕ den Winkel, um den die kleine Karte gegenüber der großen verdreht ist sowie $b \in \mathbb{R}^2$ die Koordinate der linken unteren Ecke der kleinen Karte, so ist $Tx = Ax + b$, $x \in X \subset \mathbb{R}^2$, wobei $A = tR$ und $R = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$ die Rotationsmatrix ist. Die Gleichung $Tx = x$ wird zu $(I - A)x = b$ ($I =$ Einheitsmatrix). $I - A$ ist invertierbar, da die Eigenwerte von R den Betrag eins, also die Eigenwerte von $A = tR$ den Betrag t haben, also ungleich eins sind. Das Inverse von $I - A$ kann man mittels der geometrischen Reihe als

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + \dots$$

schreiben. (Mehr zu Reihen von Matrizen später bei Differentialgleichungen. Für die Konvergenz braucht man $\|A\| < 1$ mit der in der Übung eingeführten Matrixnorm, dies ist hier erfüllt.) Also $x = (I - A)^{-1}b = b + Ab + A^2b + A^3b + \dots$. Dies entspricht gerade der Bestimmung des Fixpunktes x durch Iteration, denn für beliebiges $x_0 \in X$ ist $Tx_0 = Ax_0 + b$, $T^2x_0 = A(Ax_0 + b) + b = A^2x_0 + Ab + b$, \dots , $T^n x_0 = A^n x_0 + A^{n-1}b + A^{n-2}b + \dots + Ab + b$. Der erste Term geht für $n \rightarrow \infty$ gegen null, der Rest sind die Partialsummen der geometrischen Reihe oben, konvergieren also gegen x . So passt alles wunderbar zusammen.

Vollständigkeit von \mathbb{R}^n und Funktionenräumen

Wir werden den Fixpunktsatz im Laufe der Vorlesung zweimal an zentralen Stellen anwenden: Einmal im Beweis des Satzes über die Umkehrfunktion (gegen Ende des Semesters), im Fall $X = \mathbb{R}^n$, und einmal zum Beweis der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Differentialgleichungen, im Fall $X = C([a, b])$. Daher prüfen wir nun die Vollständigkeit dieser Räume (mit geeigneten Metriken) nach.

1.3.9 Satz

\mathbb{R}^n ist vollständig.

Wie immer, wenn nichts dazu gesagt wird, betrachten wir die euklidische Metrik auf \mathbb{R}^n . Zum Beweis verwenden wir das auch sonst äußerst nützliche

1.3.10 Lemma

Sei (x_1, x_2, x_3, \dots) eine Folge in \mathbb{R}^n und $x \in \mathbb{R}$. Schreibe x und die x_k in Koordinaten als $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$, $x_k = (x_k^{(1)}, \dots, x_k^{(n)})$. Dann gilt:

$$(1) \quad x_k \rightarrow x \quad (k \rightarrow \infty) \iff x_k^{(i)} \rightarrow x^{(i)} \quad (k \rightarrow \infty) \text{ für jedes } i = 1, \dots, n.$$

$$(2) \quad (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ Cauchy-Folge in } \mathbb{R}^n \iff (x_k^{(i)})_{k \in \mathbb{N}} \text{ Cauchy-Folge in } \mathbb{R} \text{ für jedes } i = 1, \dots, n.$$

Ausnahmsweise verwenden wir hier obere Indizes für die Komponenten, damit sich die Komponentenindizes nicht mit den Folgenindizes ins Gehege kommen.

Beachten Sie, dass n hier die Dimension und kein Folgenindex ist!!

Beweis: Wir beweisen nur (1); (2) geht ähnlich. Für jedes $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ und $k \in \mathbb{N}$ ist

$$|x_k^{(i_0)} - x^{(i_0)}| \leq \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_k^{(i)} - x^{(i)})^2}}_{=\|x_k - x\|} \leq \sqrt{n \cdot \max_i |x_k^{(i)} - x^{(i)}|^2} = \sqrt{n} \cdot \max_i |x_k^{(i)} - x^{(i)}|$$

Die erste Ungleichung zeigt $\|x_k - x\| < \varepsilon \implies |x_k^{(i_0)} - x^{(i_0)}| < \varepsilon$, und damit $\supset \supset \supset$ mittels der Definition der Folgenkonvergenz.

Gilt umgekehrt $x_k^{(i)} \rightarrow x^{(i)} \quad (k \rightarrow \infty)$ für jedes $i = 1, \dots, n$, so gibt es zu $\varepsilon > 0$ und zu jedem $i = 1, \dots, n$ ein k_i mit $|x_k^{(i)} - x^{(i)}| < \varepsilon$ für $k \geq k_i$. Setze $k_0 = \max\{k_1, \dots, k_n\}$, dann ist für $k \geq k_0$ auch $\max_i |x_k^{(i)} - x^{(i)}| < \varepsilon$, also $\|x_k - x\| \leq \sqrt{n} \cdot \varepsilon$. Da n eine Konstante ist (die Dimension), folgt die Konvergenz $x_k \rightarrow x \quad (k \rightarrow \infty)$. □

Beweis (Satz 1.3.9): Sei (x_k) Cauchy-Folge in \mathbb{R}^n . Damit folgt mit (2) im Lemma: $(x_k^{(i)})$ Cauchy-Folge in \mathbb{R} für alle i , somit existiert für jedes i $x^{(i)} := \lim_{k \rightarrow \infty} x_k^{(i)}$, damit folgt mit (1) im Lemma: $x_k \rightarrow x \quad (k \rightarrow \infty)$. □

Wir betrachten nun die Funktionenräume, die nach Satz 1.1.6 eingeführt wurden.

1.3.11 Satz

- (1) $\mathcal{B}(M, \mathbb{R})$ mit der Supremumsnorm ist vollständig, für jede Menge M .
 (2) $C([a, b])$ mit der Supremumsnorm ist vollständig, für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$.

Beweis:

(1) Sei (f_k) Cauchy-Folge in $\mathcal{B}(M, \mathbb{R})$.

Sei $x_0 \in M$. Für alle $k, l \in \mathbb{N}$ ist $|f_k(x_0) - f_l(x_0)| \leq \sup_{x \in M} |f_k(x) - f_l(x)| = \|f_k - f_l\|$.

$\Rightarrow (f_k(x_0))$ Cauchy-Folge in $\mathbb{R} \Rightarrow$ Der Grenzwert $f(x_0) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x_0)$ existiert.

Dies definiert eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Zu prüfen ist:

- (a) $f_k \rightarrow f$ gleichmäßig (d. h. $f_k \rightarrow f$ bzgl. der Supremumsnorm).
 (b) f ist beschränkt.

Zu (a): Zu $\varepsilon > 0$ wähle k_0 mit $\|f_k - f_l\| < \varepsilon$ für $k, l \geq k_0$. Für jedes $x \in M$ und $k \geq k_0$ ist $|f_k(x) - f(x)| = \lim_{l \rightarrow \infty} |f_k(x) - f_l(x)| < \varepsilon$, da $|f_k(x) - f_l(x)| \leq \|f_k - f_l\| < \varepsilon$ für $l \geq k_0$ gilt. Da ε nicht von x abhängt, zeigt das die gleichmäßige Konvergenz.

Zu (b): Zu $\varepsilon = 1$ wähle k mit $\|f_k - f\| < 1$. Dann folgt für alle $x \in M$ $|f(x)| \leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x)| < 1 + \|f_k\|$, also ist f beschränkt.

(2) $C([a, b])$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{B}([a, b])$, denn aus $f_k \in C([a, b])$ für alle k , $f \in \mathcal{B}([a, b])$, $f_k \rightarrow f$ ($k \rightarrow \infty$) (bzgl. der Supremumsnorm, also gleichmäßig) folgt $f \in C([a, b])$ (der gleichmäßige Limes stetiger Funktionen ist stetig, Analysis I, Satz 10.4.2). Nach Satz 1.3.3 ist also $C([a, b])$ vollständig. \square

Bemerkung: Auf $C([a, b])$ gibt es noch andere Normen, die in manchen Zusammenhängen wichtig sind, z. B. $\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)| dx$. Bezüglich $\|\cdot\|_1$ ist $C([a, b])$ aber nicht vollständig!

Beispiel: Die Folge $f_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -1 \leq x < 0 \\ kx & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{k} \\ 1 & \text{für } \frac{1}{k} \leq x \leq 1 \end{cases}$ ist eine Cauchy-Folge in $(C([-1, 1]), \|\cdot\|_1)$, hat aber keinen Grenzwert.

(Intuitiv: Der Grenzwert »müsste« die Sprungfunktion $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ sein, diese ist aber nicht stetig.)

1.4 Stetige Abbildungen

Definition und Charakterisierungen

1.4.1 Definition

(X, d_X) , (Y, d_Y) seien metrische Räume, $f : X \rightarrow Y$ und $p \in X$.

f heißt **stetig in p** $:\Leftrightarrow$ Für jede Folge (x_k) in X gilt: $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} p \implies f(x_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(p)$

Dies ist wiederum völlig analog zum reellen Fall.

1.4.2 Satz

$(X, d_X), (Y, d_Y)$ seien metrische Räume, $f : X \rightarrow Y$ und $p \in X$.

Dann gilt:

f ist stetig in p

\iff

Für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, so dass für alle $x \in X$ gilt:

$$d_X(x, p) < \delta \implies d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$$

\iff

Für jede Kugel K um $f(p)$ gibt es eine Kugel K' um p mit $K' \subset f^{-1}(K)$

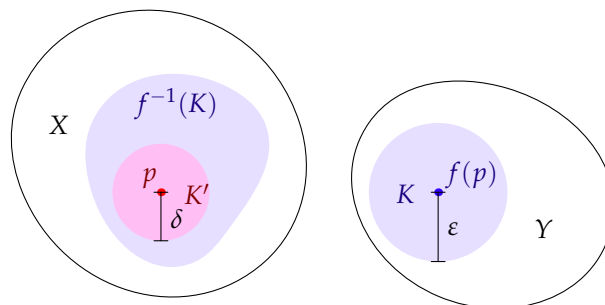


Abbildung 1.19

Zur Erinnerung: $f^{-1}(K) = \{x \in X : f(x) \in K\}$ »Urbild von K unter f «.

Beweis: Äquivalenz der ersten beiden Aussagen: Genau wie in Analysis I (Satz 10.1.5).

Äquivalenz der zweiten und dritten Aussage: Mit $K = K_\varepsilon(f(p)), K' = K_\delta(p)$ gelten die vertikalen Äquivalenzen in

$$\begin{array}{ccc} d_X(x, p) < \delta & \implies & d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ x \in K_\delta(p) = K' & & f(x) \in K_\varepsilon(f(p)) = K \\ & & \Downarrow \\ & & x \in f^{-1}(K) \end{array}$$

also ist die obere horizontale Implikation äquivalent zur Implikation $x \in K' \implies x \in f^{-1}(K)$, was gerade $K' \subset f^{-1}(K)$ bedeutet. □

1.4.3 Korollar

$(X, d_X), (Y, d_Y)$ seien metrische Räume, und $f : X \rightarrow Y$.

Angenommen, es existiert ein $L \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x, y \in X$ gilt:

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y)$$

Dann ist f stetig. Insbesondere sind Kontraktionen stetig.

Abbildungen mit der beschriebenen Eigenschaft nennt man auch **Lipschitz-stetig**, und L wird eine **Lipschitz-Konstante** für f genannt. Kontraktionen sind also gerade die Abbildungen mit Lipschitz-Konstante kleiner als eins.

Beweis: Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ (falls $L > 0$. Falls $L = 0$, so ist f konstant, also stetig.) □

Folgende Charakterisierung der Stetigkeit geht über die Analysis I hinaus.

1.4.4 Satz

$(X, d_X), (Y, d_Y)$ seien metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$.

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (1) f ist stetig auf X (d. h. stetig in jedem $p \in X$).
- (2) $f^{-1}(O)$ ist offen für jedes offene $O \subset Y$.
- (3) $f^{-1}(A)$ ist abgeschlossen für jedes abgeschlossene $A \subset Y$.

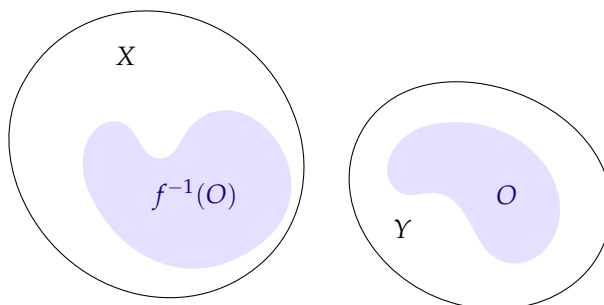


Abbildung 1.20. Das Urbild einer offenen Menge ist offen

Beweis: (1) \Rightarrow (2): Sei $p \in f^{-1}(O)$, d. h. $f(p) \in O$. O ist offen, also existiert eine Kugel K um $f(p)$ mit $K \subset O$ und damit $f^{-1}(K) \subset f^{-1}(O)$. Da f stetig in p ist, existiert nach Satz 1.4.2 eine Kugel K' um p mit $K' \subset f^{-1}(K) \subset f^{-1}(O)$. Also ist $f^{-1}(O)$ offen.

(2) \Rightarrow (1): Ähnlich.

(2) \Rightarrow (3): A abgeschlossen $\Rightarrow A^c$ offen $\stackrel{(2)}{\Rightarrow} f^{-1}(A^c)$ offen. Nun gilt $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$ (Übung), also folgt $(f^{-1}(A))^c$ offen $\Rightarrow f^{-1}(A)$ abgeschlossen.

(3) \Rightarrow (2): Ähnlich. □

Der etwas abstrakt wirkende Satz 1.4.4 hat große praktische Bedeutung. Er erlaubt es, für viele konkrete Mengen sehr einfach nachzuprüfen, ob sie offen oder abgeschlossen sind.

Beispiele: (Die Stetigkeit der vorkommenden Funktionen wird unten gezeigt.)

(1) Die Sphäre $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$ ist abgeschlossen in $X = \mathbb{R}^3$.

Zum Beweis sei $f(x) = \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, dann ist $S = f^{-1}(\{1\})$.

$\{1\} \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen, f stetig, somit ist S abgeschlossen.

Bemerkung: Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein beliebiger normierter Raum, so ist $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, also ist die Einheitssphäre immer abgeschlossen. (Übung)

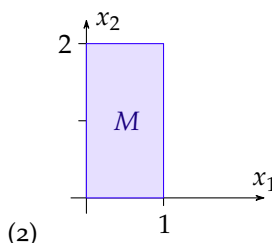


Abbildung 1.21. abgeschlossenes Rechteck

$$M = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 2\} = \underbrace{\{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1\}}_{=f^{-1}([0,1])} \cap \underbrace{\{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_2 \leq 2\}}_{=g^{-1}([0,2])}$$

mit $f(x) = x_1$, $g(x) = x_2$, $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

f, g stetig, $[0, 1], [0, 2] \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen, Schnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen, somit ist M abgeschlossen.

- (3) $M = \{x \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{\cos x_2 + x_2 e^{x_1}}_{f(x)} > 0\}$ ist offen, da $M = f^{-1}((0, \infty))$, $(0, \infty) \subset \mathbb{R}$ offen und $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist.

Allgemeines Prinzip

Mengen, die nur mittels strikter Ungleichungen zwischen stetigen Funktionen definiert sind, sind offen.

Mengen, die nur mittels $=, \leq, \geq$ zwischen stetigen Funktionen definiert sind, sind abgeschlossen.

Ein Beispiel zur Vorsicht

Betrachte $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ für alle x . Also $f^{-1}(\{1\}) = (0, 1)$.

f ist konstant, also stetig, und $\{1\} \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossen. Also ist $(0, 1)$ abgeschlossen.

Wie passt das zusammen? Antwort: Hier ist $X = (0, 1)$, und in der Tat ist $(0, 1)$ als Teilmenge von X abgeschlossen. (X ist als Teilmenge von X immer offen und abgeschlossen.)

Wollte man aber ein f auf ganz \mathbb{R} definieren mit $f^{-1}(\{1\}) = (0, 1)$, so wäre also $f(x) = 1$ für $x \in (0, 1)$, aber $f(0) \neq 1$, $f(1) \neq 1$. Also wäre f in 0 und 1 unstetig! Das illustriert den Satz sehr gut.

Stetige Funktionen und Abbildungen konkret

Wie sieht man einer konkreten Funktion an, ob sie stetig ist? Am einfachsten mittels der folgenden Kriterien.

1.4.5 Satz

Sei (X, d) metrischer Raum, $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}) stetig.

Dann sind $f + g$, $f \cdot g$ stetig, und $\frac{f}{g}$ ist stetig, falls $g(x) \neq 0$ für alle x .

Beweis: Genau wie in Analysis I (Satz 10.1.3). □

Um wirklich konkret zu werden, brauchen wir im Fall $X = \mathbb{R}^n$:

1.4.6 Satz

Die Koordinatenfunktionen $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f_i(x) = x_i$ sind stetig ($i = 1, \dots, n$).

Beweis: Klar aus der Definition und Lemma 1.3.10. □

Beispiel: Die Funktionen $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ oder $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ sind also stetig.

1.4.7 Korollar

Polynome auf \mathbb{R}^n sind stetig.

Hierbei ist ein **Polynom auf \mathbb{R}^n** eine Abbildung, die sich aus den Koordinatenfunktionen und Konstanten mittels endlich vieler Additionen und Multiplikationen bilden lässt, zum Beispiel

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - x_2 + \pi x_1^5 x_2^3, \text{ aber nicht } \frac{x_1}{x_2}.$$

1.4.8 Satz

Seien $(X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z)$ metrische Räume und $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ stetig.
Dann ist $g \circ f : X \rightarrow Z$ stetig.

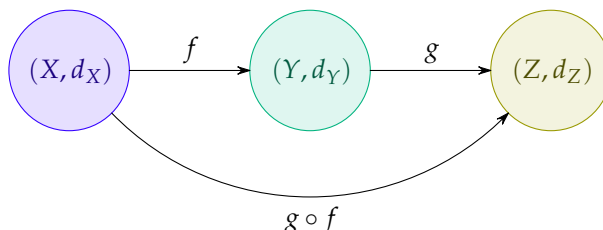


Abbildung 1.22. Komposition stetiger Abbildungen

Beweis: Unmittelbar aus den Definitionen. Vergleiche Satz 10.1.4 in Analysis I. □

Beispiel: $F(x_1, x_2) = \underbrace{\cos x_1}_{(\cos \circ f_1)(x)} + \underbrace{x_2 e^{x_1}}_{(f_2 \circ (\exp \circ f_1))(x)}$ ist stetig.

Für Abbildungen in einen \mathbb{R}^n ist Stetigkeit äquivalent zur Stetigkeit der Komponentenfunktionen, genauer:

1.4.9 Satz

Sei (X, d) metrischer Raum und seien $f_1, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen auf X . Definiere $f : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ für $x \in X$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) f ist stetig;
- (ii) f_1, \dots, f_n sind stetig.

1.5 Kompakte Mengen

Frage: Gibt es eine Verallgemeinerung des Satzes

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow f$ nimmt sein Maximum und sein Minimum an, d. h.

$\exists m \in [a, b], \exists M \in [a, b]$ mit $f(m) \leq f(x) \leq f(M)$ für alle $x \in [a, b]$?

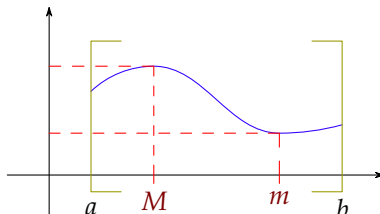


Abbildung 1.23. Maximum und Minimum einer auf einem geschlossenem Intervall definierten Funktion

Für welche Teilmengen X von \mathbb{R}^n , allgemeiner für welche metrischen Räumen (X, d) gilt die analoge Aussage mit $[a, b]$ ersetzt durch X ? Wir wissen, dass dies zum Beispiel für unbeschränkte Mengen und für offene Intervalle nicht zutrifft. (Beispiele in Analysis I.)

Um diese Frage zu beantworten, erinnern wir uns, dass beim Beweis des Satzes vom Maximum und Minimum der Begriff des Häufungspunktes wesentlich war.

1.5.1 Definition

Ein metrischer Raum (X, d) heißt **kompakt**, falls gilt: Jede Folge in X hat einen Häufungspunkt (natürlich in X).

Eine Teilmenge M eines metrischen Raumes (X, d) heißt **kompakt**, falls der metrische Raum $(M, d|_M)$ kompakt ist, d.h. falls jede Folge in M einen Häufungspunkt in M hat.

Genau wie in \mathbb{R} kann man ›Jede Folge in X hat einen Häufungspunkt‹ äquivalent durch ›Jede Folge in X hat eine konvergente Teilfolge‹ ersetzen.

1.5.2 Satz

Jedes $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ($a \leq b$ reelle Zahlen) ist kompakt.

Beweis: Sei (x_n) Folge in $[a, b]$, dann ist (x_n) beschränkt, somit hat (x_n) einen Häufungspunkt $x \in \mathbb{R}$ (nach Bolzano-Weierstraß), also gibt es eine Teilfolge (x_{n_i}) mit $x_{n_i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} x$.

$[a, b]$ ist abgeschlossen, also $x \in [a, b]$. □

Beispiele:

(1) $(0, 1)$ ist nicht kompakt: $x_n = \frac{1}{n} \in (0, 1)$ ($n \geq 2$), damit ist $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \notin (0, 1)$, somit kann (x_n) keinen Häufungspunkt in $(0, 1)$ haben.

(2) $[0, \infty)$ ist nicht kompakt, denn $x_n = n$ hat keinen Häufungspunkt.

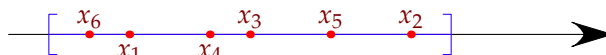


Abbildung 1.24. Eine Folge auf dem Intervall $[0, 1]$

Diese Beispiele lassen sich verallgemeinern:

1.5.3 Satz

Ist $M \subset X$ kompakt, dann ist M abgeschlossen und beschränkt.

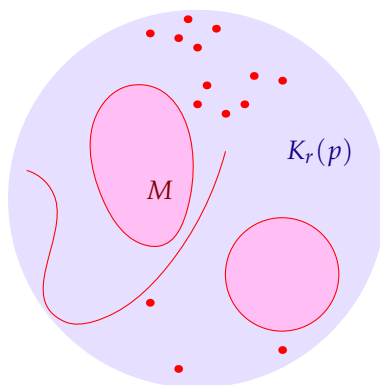


Abbildung 1.25. Jeder Punkt der Menge M liegt in der Kugel $K_r(p)$

Hierbei heißt $M \subset X$ **beschränkt**, falls $p \in X$ und $r > 0$ existieren mit $M \subset K_r(p)$. (Dies ist äquivalent dazu, dass für jedes $p \in X$ ein r existiert mit $M \subset K_r(p)$ – Übung! Damit ist dies äquivalent zum in Analysis I für $X = \mathbb{R}$ eingeführten Begriff, wo $p = 0$ angenommen wurde.)

Beweis: Wir beweisen beide Aussagen indirekt:

1. Angenommen, M ist nicht abgeschlossen.

⇒ Es existiert eine konvergente Folge (x_n) in M , so dass $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ nicht in M liegt.

⇒ (x_n) hat keinen Häufungspunkt in M . (Denn eine konvergente Folge hat nur einen Häufungspunkt: Ihren Grenzwert.)

2. Angenommen, M ist unbeschränkt. Wähle $p \in X$, $x_n \in M \setminus K_n(p)$ für $n = 1, 2, \dots$. Existierte eine konvergente Teilfolge $x_{n_i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} q$, so wäre $d(x_{n_i}, q) < 1$ für $i \geq i_0$ mit geeignetem i_0 , also $d(x_{n_i}, p) \leq d(x_{n_i}, q) + d(q, p) < 1 + d(q, p)$ unabhängig von i , im Widerspruch zu $d(x_{n_i}, p) \geq n_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \infty$. □

Im \mathbb{R}^n gilt auch die Umkehrung. Dieser Satz ist äußerst wichtig.

1.5.4 Satz

$M \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt $\Leftrightarrow M$ ist abgeschlossen und beschränkt.

Wichtig: Das gilt für Teilmengen des \mathbb{R}^n (mit der euklidischen Metrik). In anderen metrischen Räumen muss die Implikation $\supset \Leftarrow \Leftarrow$ nicht gelten, siehe die Bemerkung weiter unten.

Beweis: Wegen Satz 1.5.3 müssen wir nur $\supset \Leftarrow \Leftarrow$ zeigen. Sei also $M \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt und außerdem (x_k) eine Folge in M . Wir müssen zeigen, dass (x_k) einen Häufungspunkt in M hat.

Schreibe in Komponenten $x_k = (x_k^{(1)}, \dots, x_k^{(n)})$. Da M beschränkt ist, ist die Folge $(x_k)_k$ beschränkt, also ist $(x_k^{(i)})_k$ beschränkt, $i = 1, \dots, n$. Nach Bolzano-Weierstraß hat $(x_k^{(1)})_k$ eine konvergente Teilfolge, sagen wir $x_{k'}^{(1)} \xrightarrow{k' \rightarrow \infty} x^{(1)}$. Wiederum nach Bolzano-Weierstraß hat die Teilfolge $(x_{k'}^{(2)})_{k'}$ eine konvergente (Teil-)Teilfolge, sagen wir $x_{k''}^{(2)} \xrightarrow{k'' \rightarrow \infty} x^{(2)}$. Beachte, dass immer noch $x_{k''}^{(1)} \xrightarrow{k'' \rightarrow \infty} x^{(1)}$ gilt.

Wir fahren so bis zur n -ten Komponente fort und erhalten schließlich eine Teilfolge $(x_{\tilde{k}})$ von (x_k) und Werte $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ mit $x_{\tilde{k}}^{(i)} \xrightarrow{\tilde{k} \rightarrow \infty} x^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$. Aus Lemma 1.3.10 folgt, dass $x_{\tilde{k}} \xrightarrow{\tilde{k} \rightarrow \infty} x := (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$, also hat (x_k) den Häufungspunkt x . Da M abgeschlossen ist, gilt $x \in M$, was zu zeigen war. □

Beispiele: Die folgenden Mengen sind kompakt. Die Abgeschlossenheit wurde nach Satz 1.4.4 gezeigt:

(1) $M = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 2\}$. Beschränkt: $M \subset K_3(0)$, da $(x_1, x_2) \in M$

$$\Rightarrow |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 2 \Rightarrow \|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq \sqrt{5} < 3.$$

(2) $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ ist kompakt. Beschränkt: $S \subset K_2(0)$.

Bemerkung: In $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ ist die Menge $S = \{f \in C([a, b]) : \|f\| = 1\}$ abgeschlossen und beschränkt, aber nicht kompakt. Zum Beispiel hat die Folge (f_k) , $f_k(x) = \begin{cases} kx & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{k} \\ 1 & \text{für } \frac{1}{k} < x \leq 1 \end{cases}$ keinen Häufungspunkt. (Beweis als Übung)

Unser nächstes Ziel ist, den Satz vom Maximum und Minimum zu beweisen. Einen Schritt im Beweis formulieren wir separat:

1.5.5 Satz

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $f : X \rightarrow Y$ sei stetig.

Ist $M \subset X$ kompakt, so ist $f(M)$ kompakt.

(»Bilder kompakter Mengen unter stetigen Funktionen sind kompakt«)

Bemerkung: Vergleiche: $A \subset Y$ abgeschlossen $\Rightarrow f^{-1}(A)$ abgeschlossen.

Kompaktheit bleibt unter f erhalten, Abgeschlossenheit aber unter f^{-1} !

Beweis: Sei (y_n) Folge in $f(M)$. Für jedes n wähle $x_n \in M$ mit $f(x_n) = y_n$.

M ist kompakt, somit existiert eine Teilfolge x_{n_i} mit $x_{n_i} \rightarrow x \in M$.

f ist stetig, also $y_{n_i} = f(x_{n_i}) \rightarrow f(x) \in f(M)$. □

1.5.6 Satz

Sei (X, d) metrischer Raum, $M \subset X$ kompakt, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Dann nimmt f auf M sein (globales) Maximum und Minimum an.

Bemerkung: Da Kompaktheit ein intrinsischer Begriff ist, könnten wir diesen Satz genauso gut nur für eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem kompakten metrischen Raum (X, d) formulieren, ohne eine Teilmenge $M \subset X$ zu erwähnen. Ähnliches gilt für Satz 1.5.3 und Satz 1.5.5. Da wir aber hauptsächlich an Teilmengen des \mathbb{R}^n interessiert sind, also an $X = \mathbb{R}^n$ denken, haben wir diese »relative« Formulierung gewählt.

Zum Beweis brauchen wir:

1.5.7 Lemma

Sei $A \subset \mathbb{R}$ kompakt. Dann hat A ein Maximum und ein Minimum.

Beweis: Weil A beschränkt ist, existiert das Supremum $S = \sup A$. Nach der Definition des Supremums existieren $y_n \in A$ ($n \in \mathbb{N}$) mit $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S$. Da A abgeschlossen ist, folgt $S \in A$, das heißt: S ist Maximum von A . Die Existenz des Minimums zeigt man analog mittels des Infimums. □

Beweis (von Satz 1.5.6): $M \subset X$ sei kompakt. Nach Satz 1.5.5 (angewendet auf $Y = \mathbb{R}$ und X ersetzt durch M) ist $f(M) \subset \mathbb{R}$ kompakt. Nach dem Lemma hat die Menge $f(M)$ ein Maximum. Daraus folgt der Satz: $S = \max f(M)$ bedeutet: $\exists x_0$ mit $S = f(x_0)$ und $\forall x \in M : f(x) \leq S = f(x_0)$. Das heißt: f nimmt in x_0 sein Maximum an. Analog folgt die Existenz des Minimums. □

Bemerkung: Der Satz vom Maximum und Minimum (und daher der Kompaktheitsbegriff) hat eine zentrale Bedeutung in der Mathematik. Viele Probleme kann man mittels der Idee des »Extremalprinzips« lösen, d. h. man betrachtet eine geeignete (je nach Problem einzuführende) Funktion, deren Maxima oder Minima einem die Lösung des Problems quasi schenken.

Ein Beispiel aus der linearen Algebra: Wie Sie wissen, hat jede symmetrische reelle $n \times n$ -Matrix A einen Eigenvektor (sogar n Stück; hat man erst mal einen, findet man die anderen mit Induktion). Dies ist nicht leicht zu zeigen. Hier ist eine Beweisidee mit analytischen Mitteln:

(1) Betrachte die Funktion $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto ((x, Ax))$ auf der Einheitskugel $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$. Da S kompakt ist, gibt es einen Punkt $x_0 \in S$, wo f maximal ist.

(2) Mit Mitteln der n -dimensionalen Differentialrechnung zeigt man nun leicht, dass ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existieren muss mit $Ax_0 = \lambda x_0$, d. h. x_0 ist Eigenvektor für A .

Man braucht hier den Satz über »Extrema mit Nebenbedingungen« (kommt später in der Vorlesung), eine Verallgemeinerung der Aussage, dass die Ableitung einer differenzierbaren Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bei einem Maximum verschwindet.

2 Kurven und Vektorfelder: Differentialgleichungen als geometrisches Problem

Die Hauptakteure der mehrdimensionalen Analysis sind Abbildungen

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad U \subset \mathbb{R}^n.$$

Was wollen wir über diese lernen?

- ▷ Was wir uns unter f vorstellen: Für $m = n = 1$ haben wir uns f mittels seines Graphen vorgestellt. Ähnliches geht, solange $m + n \leq 3$ ist, sonst nicht, da wir uns von mehr als 3 Dimensionen kein Bild machen können;
- ▷ wie man die mathematischen Begriffe, die wir in Analysis I als wichtig erkannt haben, vom Fall $m = n = 1$ auf beliebige Dimensionen verallgemeinert (Stetigkeit, Ableitung, Integral etc.), und wie man sie anwendet;
- ▷ in welchen Zusammenhängen sie auftreten.

Hier ein kurzer Überblick über verschiedene Vorstellungen bzw. Bedeutungen von Abbildungen f (mehr dazu nach Satz 7.1.6):

1. $n = 1$: Eine Kurve im \mathbb{R}^m (siehe unten).
2. $m = 1$: Zum Beispiel eine Temperaturverteilung im Raum (falls $n = 3$). Oder: Der Graph von f beschreibt eine Fläche im Raum ($n = 2$).
3. $m = n$: Ein Vektorfeld (siehe unten). Oder: Eine Transformation: $x \in U$ wird in $f(x)$ transformiert; z.B. ist eine Drehung der Ebene um den Winkel φ durch die Abbildung $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 \cos \varphi - x_2 \sin \varphi, x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi)$ gegeben. Oder: Ein Koordinatenwechsel (wird in Analysis III behandelt).

Stetigkeit haben wir in Kapitel 1.4 ausführlich diskutiert, für beliebige m, n .

In diesem Kapitel werden wir Kurven und Vektorfelder diskutieren und sehen, wie eine einfache Fragestellung über sie zu Differentialgleichungen führt.

2.1 Kurven im \mathbb{R}^n

2.1.1 Definition

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

Eine stetige Funktion $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt (**parametrisierte**) **Kurve** in \mathbb{R}^n .

Das Bild $\gamma(I) = \{\gamma(t) : t \in I\} \subset \mathbb{R}^n$ heißt (**unparametrisierte**) **Kurve** in \mathbb{R}^n .

$\gamma(I)$ heißt auch **Orbit von γ** .

Beispiele: (Immer $I = \mathbb{R}$, $n = 2$).

- (1) $\gamma(t) = (t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

- (2) $\tilde{\gamma} = (t^3, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$. $\tilde{\gamma}$ hat denselben Orbit wie γ , aber eine andere Parametrisierung.
- (3) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$ ein Kreis, unendlich oft durchlaufen.
- (4) $\gamma(t) = (t^3, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$, die **Neilsche Parabel**.

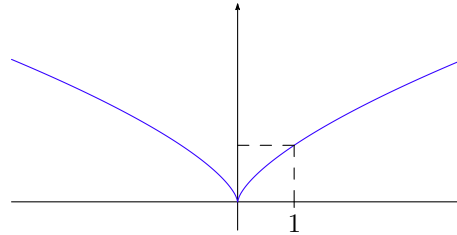


Abbildung 2.1. Neilsche Parabel

Wie zeichnet man den Orbit von γ ? Eine Methode: Setze $x(t) = t^3$, $y(t) = t^2$.

Finde eine Relation zwischen $x(t)$ und $y(t)$, in der t nicht vorkommt: $y(t) = x(t)^{\frac{2}{3}}$

(jedenfalls für $x(t) \geq 0$, d. h. $t \geq 0$). Das heißt, dass der Orbit Teil des Graphen der Funktion $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ ist. Daran sieht man zum Beispiel, dass der Orbit sich für $t \rightarrow 0$ von »oben« dem Nullpunkt nähert, denn $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty$ (Tangente wird vertikal).

Für $t \leq 0$: $y(t) = |x(t)|^{\frac{2}{3}}$, denn $|x(t)| = |t^3| = |t|^3 \Rightarrow |x(t)|^{\frac{2}{3}} = |t|^2 = t^2 = y(t)$. (Die Extra-Betrachtung von $t \leq 0$ ist notwendig, da wir Potenzen mit nicht-ganzen Exponenten nur für positive Basis definiert haben.)

Man sieht leicht, dass der Orbit von γ genau der Graph von $f(x) = |x|^{\frac{2}{3}}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist.

Vorstellung: Man betrachtet $t \in I$ als Zeitpunkte. $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ beschreibt den Weg eines Objekts (Teilchen, Bus) im Zeitintervall I , *inklusive Fahrplan* (d. h. wann ist der Bus wo?! Der Orbit von γ ist nur der Weg, ohne Fahrplan.

Bemerkung: Der Begriff »Kurve« kann eine parametrisierte oder eine unparametrisierte Kurve bezeichnen. Im ersten Fall also eine Abbildung, im zweiten eine Menge. Was gemeint ist, muss man dem Kontext entnehmen. Statt unparametrisierter Kurve sagen manche auch Weg, Trajektorie, Spur, ... Im Rahmen dieser Vorlesung bezeichnet »Kurve« stets eine parametrisierte Kurve, wenn nicht explizit anders angegeben.

Der Fall $n = 1$: Der Orbit einer Funktion $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}$ ist ein Intervall und enthält damit herzlich wenig Information über γ (nur das Supremum und Infimum von γ über I). Daher stellt man, wie Sie wissen, Funktionen $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}$ meistens mittels ihrer Graphen $\{(t, \gamma(t)) : t \in I\} \subset \mathbb{R}^2$ dar.

Entsprechend in höheren Dimensionen: Für eine Kurve $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist der **Graph von γ** die Menge

$$\{(t, \gamma(t)) : t \in I\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Dies ist wiederum der Orbit einer Kurve:

$$\tilde{\gamma}: I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, t \mapsto (t, \gamma(t))$$

Genau wie der Graph einer Funktion die Funktion vollständig beschreibt, so legt auch der Orbit von $\tilde{\gamma}$ die (parametrisierte) Kurve γ eindeutig fest.

Schreibweise: $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, falls $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall.

Für $n = 2$ auch: $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

Die folgende Definition ist physikalisch motiviert. Bewegt sich ein Objekt vom Ort x_0 nach x_1 in der Zeit s , so nennt man den Quotienten $\frac{\text{Deplatierung}}{\text{Zeitintervall}} = \frac{x_1 - x_0}{s}$ seine mittlere Geschwindigkeit.

2.1.2 Definition (Ableitung einer Kurve)

Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ Kurve. Für $t_0, t_1 \in I$, $t_0 \neq t_1$ heißt

$$\frac{\gamma(t_1) - \gamma(t_0)}{t_1 - t_0}$$

die **mittlere Geschwindigkeit** zwischen t_0 und t_1 . Falls der Grenzwert

$$\gamma'(t_0) := \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t_1) - \gamma(t_0)}{t_1 - t_0}$$

existiert, so heißt $\gamma'(t_0)$ **Momentangeschwindigkeit(-vektor)** oder **Ableitung** von γ zum Zeitpunkt t_0 , und γ **differenzierbar** in t_0 .

Im Fall $n = 1$ ist das offensichtlich die alte Definition der Ableitung, und in höheren Dimensionen verhält sich die Ableitung so, wie man es sich erhoffen würde:

2.1.3 Satz

Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$.

γ ist differenzierbar in $t \in I$ genau dann, wenn jedes $x_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ in t differenzierbar ist ($i = 1, \dots, n$), und in diesem Fall ist

$$\gamma'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t))$$

Beweis: Nach Definition ist

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(t_1) - \gamma(t)}{t_1 - t} &= \frac{(x_1(t_1), \dots, x_n(t_1)) - (x_1(t), \dots, x_n(t))}{t_1 - t} \\ &= \frac{(x_1(t_1) - x_1(t), \dots, x_n(t_1) - x_n(t))}{t_1 - t} \\ &= \left(\frac{x_1(t_1) - x_1(t)}{t_1 - t}, \dots, \frac{x_n(t_1) - x_n(t)}{t_1 - t} \right) \end{aligned}$$

daher folgt der Satz direkt aus Lemma 1.3.10 und der Definition der Ableitung für Funktionen $I \rightarrow \mathbb{R}$. \square

Beispiele:

(1)

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$\gamma'(0) = (-\sin 0, \cos 0)$$

$$= (0, 1)$$

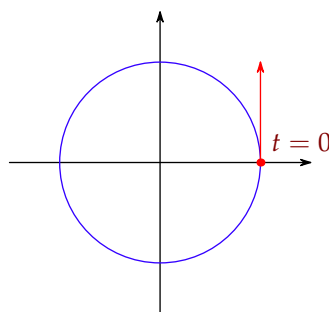


Abbildung 2.2

(2) $\gamma(t) = (t^3, t^2)$ ist differenzierbar für alle $t \in \mathbb{R}$. Trotzdem hat der Orbit von γ im Nullpunkt, $\gamma(0) = (0, 0)$, eine »Spitze«. Passt das zusammen?

Berechne $\gamma'(t) = (3t^2, 2t)$, also $\gamma'(0) = (0, 0)$. Also bleibt γ zum Zeitpunkt $t = 0$ für einen Moment stehen. Danach läuft es in entgegengesetzter Richtung weiter.

Die Spitze äußert sich in Nicht-Differenzierbarkeit, wenn man die Kurve mittels der x -Koordinate parametrisiert: $\tilde{\gamma}(t) = (t, |t|^{2/3})$ hat denselben Orbit wie γ und ist in $t = 0$ nicht differenzierbar.

Wir untersuchen nun dieses Phänomen etwas genauer.

Welche Kurven in \mathbb{R}^2 sind Funktionsgraphen?

Beim Zeichnen der Neilschen Parabel war es nützlich, den Orbit von $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ als Graphen einer Funktion $f : J \rightarrow \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}$ Intervall, darzustellen:

Orbit von $\gamma =$ Graph von f , also

$$(*) \quad \{\gamma(t) : t \in I\} = \{(x, f(x)) : x \in J\}$$

Für welche Kurven geht das, und wie findet man f ?

In dieser Form ist die Frage leicht zu beantworten, das lernt man schon in der Schule:

2.1.4 Lemma

Der Orbit von γ ist genau dann als Funktionsgraph darstellbar, wenn auf dem Orbit jeder x -Wert nur höchstens einmal vorkommt. In diesem Fall gilt (*) mit

$$J = x(I), \quad f = y \circ x^{-1}$$

wobei $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ und $x^{-1} : J \rightarrow I$ die Umkehrfunktion von $x : I \rightarrow J$ ist.

Beweis: Die Bedingung ist notwendig, da bei einem Funktionsgraphen jeder x -Wert höchstens einmal vorkommt.

Kommt umgekehrt auf dem Orbit von γ jeder x -Wert höchstens einmal vor, so setzt man einfach

$J =$ die vorkommenden x -Werte und

$f(x_0) =$ der y -Wert des eindeutigen Kurvenpunktes mit x -Wert x_0 ,

was genau die behauptete Formel ist. Denn da x nach Annahme injektiv, also bijektiv auf sein Bild ist, existiert die Umkehrfunktion x^{-1} ; und für $x_0 \in J$ ist $t_0 = x^{-1}(x_0)$ der Zeitpunkt, wann γ den x -Wert x_0 hat, und der zugehörige y -Wert ist $y(t_0) = y(x^{-1}(x_0))$, daher $f(x_0) = y(x^{-1}(x_0))$. \square

Wann ist der Orbit einer *differenzierbaren* Kurve der Graph einer *differenzierbaren* Funktion?

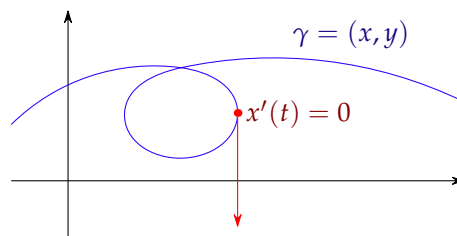


Abbildung 2.3

Bei der Neilschen Parabel war dies nicht der Fall, und wir sahen, dass γ im Problempunkt $t = 0$ stehenblieb. Das Problem besteht in Wirklichkeit darin, dass die x -Komponente von γ stehenbleibt:

2.1.5 Satz

Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Kurve, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Angenommen,

$$x'(t) \neq 0 \quad \text{für alle } t \in I.$$

Dann ist der Orbit von γ der Graph einer stetig differenzierbaren Funktion f . Weiterhin gilt für $t_0 \in I$, $x_0 = x(t_0)$:

$$f'(x_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$$

Die Annahme bedeutet: $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ sind differenzierbar und $x', y' : I \rightarrow \mathbb{R}$ sind stetig. Die Formel für die Ableitung von f kann man sich am einfachsten so merken:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

Beweis: x' kann auf I das Vorzeichen nicht wechseln. Dies folgt aus dem Zwischenwertsatz, da I ein Intervall ist, $x'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ und x' stetig ist.

Daher ist x streng monoton auf I und damit injektiv. Nach Lemma 2.1.4 ist der Orbit von γ gleich dem Graphen der Funktion $f = y \circ x^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}$, $J = x(I)$.

Sei $t_0 \in I$. Wegen $x'(t_0) \neq 0$ folgt aus dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion, dass x^{-1} bei $x_0 = x(t_0)$ differenzierbar ist mit Ableitung $1/x'(t_0)$. Die Kettenregel ergibt nun die Formel für f' . Da x', y' und x^{-1} stetig sind, ist damit auch f' stetig. \square

Beispiele:

(1) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi]$.

$x(t) = \cos t$ ist auf $[0, \pi]$ streng monoton fallend, mit Bildmenge $[-1, 1]$. Nach Lemma 2.2.3 ist der Orbit von γ Graph einer Funktion $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Berechnung von f : Die Umkehrfunktion von $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ heißt \arccos . Für $x_0 \in [-1, 1]$, $x_0 = \cos t_0$ ist

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \sin t_0 \\ &= \sin(\arccos x_0) \\ &= \sqrt{1 - [\cos(\arccos x_0)]^2} \\ &= \sqrt{1 - x_0^2} \end{aligned}$$

Hierbei ist die Wurzel positiv zu nehmen, da $\sin t_0 \geq 0$ für $t_0 \in [0, \pi]$ ist. Die Ableitung $x'(t) = -\sin t \neq 0$ für alle $t \in (0, \pi)$, verschwindet aber bei $t = 0, \pi$. Dem entspricht die vertikale Tangente an den Graph von f in den Punkten $x = \pm 1$: $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

(2) Die Zykloide: Markiere einen Punkt auf einem Fahrradreifen. Welche Kurve beschreibt der Punkt, wenn das Fahrrad in einer geraden Linie fährt?

Der Einfachheit halber seien Radius des Rades und Geschwindigkeit gleich 1. Das Rad rolle entlang der x -Achse nach rechts, zum Zeitpunkt $t = 0$ berühre es die x -Achse im Nullpunkt, und der markierte Punkt sei bei $t = 0$ gleich dem Berührungspunkt.

Der Mittelpunkt des Rades beschreibt die Kurve $m(t) = (t, 1)$, da er konstante Höhe 1 hat und sich mit Geschwindigkeit 1 nach rechts bewegt. Bis zur Zeit $t > 0$ hat sich der Kreisbogen vom markierten zum momentanen Berührungspunkt auf das Intervall $[0, t]$ der x -Achse abgerollt, also ist seine Länge gleich t . Nach Definition des Bogenmaßes folgt für den Ort des markierten Punktes zur Zeit t :

$$\gamma(t) = m(t) - (\sin t, \cos t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

Also $x(t) = t - \sin(t)$, und wegen $x'(t) = 1 - \cos t > 0$ für $t \notin 2\pi\mathbb{Z} := \{2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$ (einer diskreten Menge) ist x auf ganz \mathbb{R} streng monoton wachsend. Offenbar ist $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} \pm\infty$, also ist die Zykloide Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die auf $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ stetig differenzierbar ist. Eine Formel für f lässt sich nicht angeben, da man zur Bestimmung von x^{-1} die Gleichung $(t - \sin t) = x$ nach t auflösen müsste. Dafür existiert keine geschlossene Formel. Es ist

$$f'(x_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{\sin t_0}{1 - \cos t_0}, \text{ falls } x_0 = x(t_0),$$

dies ist aber auch nur eine »unvollständige« Formel für f' , da ja t_0 nicht explizit aus x_0 bestimmt werden kann.

Trotzdem ist diese Formel nützlich, zum Beispiel zeigt sie, auf welchen (Zeit-)Intervallen f monoton wächst oder fällt.

2.2 Vektorfelder und ihre Integralkurven

2.2.1 Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$. Eine Abbildung $V : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **Vektorfeld** auf U .

Bemerkung: Man kann sich Vektorfelder wie folgt vorstellen:

An jedem Punkt $p \in U$ ist ein Vektor (Pfeil) $V(p)$ angeklebt.

Vektorfelder treten auch bei der Beschreibung von strömenden Flüssigkeiten oder Gasen auf: $V(p)$ ist der Geschwindigkeitsvektor des Teilchens am Ort p . Hierbei ist an eine Momentaufnahme gedacht, d. h. man sieht sich alle Orte p zum selben Zeitpunkt an. Hängt das resultierende Vektorfeld nicht vom Zeitpunkt ab, so spricht man von einer **stationären Strömung**.

Ändert es sich mit der Zeit, dann spricht man von einem **zeitabhängigen Vektorfeld**, das mathematisch durch eine Abbildung $I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $I \subset \mathbb{R}$ (Zeit), $U \subset \mathbb{R}^n$ (Ort) zu beschreiben ist.

Beispiele: ($n = 2$, schreibe $p = (x, y)$).

(1) Konstante Vektorfelder, z. B. $V(x, y) = (1, 2)$.

(2) Radiales Vektorfeld $V(x, y) = (x, y)$.

(3) $V(x, y) = (-y, x)$; Bemerkung: Das Skalarprodukt $(x, y) \cdot (-y, x) = x(-y) + yx = 0$, das heißt $V(x, y)$ steht senkrecht auf (x, y) .

Eine naheliegende Frage: Gegeben ein Vektorfeld V , gibt es Kurven, die in jedem ihrer Punkte gerade V (von diesem Punkt) als Geschwindigkeitsvektor haben? Solche Kurven heißen Integralkurven von V .

Ist V das Geschwindigkeitsfeld einer stationären Strömung, so bewegen sich die Flüssigkeitsteilchen auf Integralkurven.

2.2.2 Definition

Eine Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **Integralkurve** des Vektorfeldes $V : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, falls

$\gamma(t) \in U$ und

$$\gamma'(t) = V(\gamma(t))$$

für alle $t \in I$ gilt.

Bemerkung: Das Bestimmen der Integralkurven von (explizit gegebenen) Vektorfeldern ist eines der grundlegenden Probleme der Physik. Will man zum Beispiel den Lauf der Planeten oder die komplizierte Bewegung eines Kreisels oder den Flug einer Kanonenkugel (alles historisch wichtige Beispiele) beschreiben, oder auch das Wetter vorhersagen, so muss man im Wesentlichen Integralkurven von Vektorfeldern bestimmen.

Wie findet man Integralkurven? Zum Beispiel durch Raten (Bild scharf anschauen):

Beispiele:

(1) $V(x, y) = (1, 2)$ hat die Integralkurven $\gamma(t) = p_0 + t(1, 2)$ für beliebiges $p_0 \in \mathbb{R}^2$.

(2) $V(x, y) = (-y, x)$.

Behauptung: Sei $r \geq 0$. Die Kurve $\gamma(t) = (r \cdot \cos t, r \cdot \sin t)$ ist Integralkurve von V (diese beschreibt einen Kreis vom Radius r , der mit konstanter Absolutgeschwindigkeit r durchlaufen wird). Denn

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= (-r \cdot \sin t, r \cdot \cos t) \text{ und} \\ V(\gamma(t)) &= V(r \cdot \cos t, r \cdot \sin t) \\ &= (-r \cdot \sin t, r \cdot \cos t) \\ &= \gamma'(t) \quad \text{für alle } t \in I. \end{aligned}$$

Bemerkung: Es gibt im Allgemeinen unendlich viele Integralkurven, durch jeden Anfangspunkt eine (im Beispiel für jedes $r \geq 0$ eine, und man könnte diese noch umparametrisieren, indem man t durch $t + a$ für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ ersetzt). Dies werden wir später unter gewissen Bedingungen an V beweisen, siehe Satz 5.4.2.

Von Vektorfeldern zu Differentialgleichungen

Wie bestimmt man die Integralkurven eines Vektorfeldes systematisch? Schreibe

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ V(x) &= (V_1(x), \dots, V_n(x)), \end{aligned}$$

dann ist $\gamma'(t) = V(\gamma(t))$ äquivalent zu $(x'_1(t), \dots, x'_n(t)) = (V_1(x), \dots, V_n(x))$, also zu

$$\left. \begin{aligned} x'_1(t) &= V_1(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ &\vdots \\ x'_n(t) &= V_n(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Autonomes System von} \\ \text{Differentialgleichungen} \\ \text{erster Ordnung} \end{array}$$

Erste Ordnung bedeutet: Es kommen nur erste Ableitungen im Gleichungssystem vor.

Autonom bedeutet: Die Variable t kommt nur innerhalb der x_i vor. (Mit anderen Worten: Die V_i hängen nicht von t ab). Also haben wir:

Die Integralkurven eines n -dimensionalen Vektorfeldes bestimmen



Ein autonomes System von n Differentialgleichungen erster Ordnung lösen

Natürgemäß ist dies um so komplizierter, je größer n ist. Auf den einfachsten Fall $n = 1$ gehen wir später ein. Für den Moment betrachten wir einen speziellen zweidimensionalen Fall:

2.2.3 Satz

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$, $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ und $V : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld $V(x, y) = (1, F(x, y))$.

Die Orbits der Integralkurven von V sind genau die Graphen von Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, die die Differentialgleichung

$$f'(x) = F(x, f(x)) \quad \text{für alle } x \in I$$

lösen. Genauer: Die Integralkurven haben die Form $\gamma(t) = (t + C, f(t + C))$ mit $C \in \mathbb{R}$.

Also:

Die Integralkurven eines 2-dimensionalen Vektorfeldes mit erster Komponente 1 bestimmen



Eine nicht-autonome Differentialgleichung erster Ordnung lösen

Beweis: Zunächst gilt: $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, ist Integralkurve von $V(x, y) = (1, F(x, y)) \Leftrightarrow$

$$x'(t) = 1 \quad \text{und} \quad y'(t) = F(x(t), y(t)) \quad \text{für alle } t \in I$$

Ist nun $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von $f'(x) = F(x, f(x))$, so erfüllen offenbar $x(t) = t$, $y(t) = f(t)$ diese Bedingungen, also ist $\gamma(t) = (t, f(t))$ eine Integralkurve von V .

Ist umgekehrt $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma = (x, y)$ eine Integralkurve, so folgt aus $x'(t) = 1$ für alle t , dass $x(t) = t + C$ für ein $C \in \mathbb{R}$ gilt. Dann folgt aus $y'(t) = F(x(t), y(t)) = F(t + C, y(t))$, dass mit $f(x) = y(x - C)$ gilt: $f'(x) = 1 \cdot y'(x - C) = F(x, y(x - C)) = F(x, f(x))$, was zu zeigen war. \square

Beispiele: Wir schauen uns nun ein paar Beispiele zu Satz 2.2.3 an.

Sei V ein Vektorfeld mit $V(x, y) = (1, F(x, y))$.

- (1) Sei $F(x, y) = a$ ($a \in \mathbb{R}$), so folgt aus dem Satz, dass genau diejenige Funktion f eine Integralkurve ist, die die Bedingung $f'(x) = F(x, f(x))$ erfüllt.

In diesem Fall ist $f'(x) = a$ und somit $f(x) = a \cdot x + C$, ($C \in \mathbb{R}$). Damit ist also $\gamma(t) = (t, a \cdot t + C)$ allgemeine Lösung.

- (2) Sei $F(x, y) = y$. In diesem Fall ist also $f'(x) = f(x)$. Wir kennen schon Funktionen, die diese Differentialgleichung erfüllen: $f(x) = C \cdot e^x$ ($C \in \mathbb{R}$). Wir werden bald sehen, dass es keine weiteren Lösungen gibt. Damit ergibt sich als Lösung: $\gamma(t) = (t, C \cdot e^t)$

Bemerkung: Satz 2.2.3 kann leicht auf höhere Dimensionen verallgemeinert werden: Ein nicht-autonomes System von n Differentialgleichungen erster Ordnung zu lösen ist äquivalent dazu, die Integralkurven eines Vektorfeldes in Dimension $(n + 1)$ (dessen erste Komponente gleich eins ist) zu bestimmen. Mit anderen Worten, ein nicht-autonomes System erster Ordnung lässt sich auf ein autonomes System erster Ordnung zurückführen, dieses hat aber eine Gleichung mehr.

Später werden wir sehen, dass man Differentialgleichungssysteme beliebiger Ordnung auf solche erster Ordnung zurückführen kann.

Damit ist gezeigt: Jedes System von Differentialgleichungen kann als das Problem umformuliert werden, die Integralkurven eines Vektorfeldes zu bestimmen.

3 Differentialgleichungen erster Ordnung

Wir befassen uns nun mit Lösungsmethoden für Differentialgleichungen. Von Anfang an sei gesagt, dass viele Differentialgleichungen nicht explizit lösbar sind: Man weiß zwar, dass – unter recht schwachen Voraussetzungen – eine Lösung existiert (dazu lernen wir später einen Satz kennen), aber es gibt oft keine explizite Formel für die Lösung. Sie kennen das schon von Integralen: Für manche Integrale gibt es keine geschlossene Formel. Die Verfahren, die wir kennenlernen, funktionieren daher nur für spezielle Klassen von Gleichungen.

Wir befassen uns in dieser Vorlesung nur mit **gewöhnlichen Differentialgleichungen**. Das heißt, dass die gesuchte Funktion nur von *einer* Variablen abhängt. Hängt die gesuchte Funktion von mehreren Variablen ab und kommen daher in der Gleichung ihre partiellen Ableitungen vor (diese lernen wir später kennen), so spricht man von partiellen Differentialgleichungen.

Wir beginnen mit Differentialgleichungen erster Ordnung. Das sind Gleichungen, in denen eine unbekannte Funktion (meist mit y bezeichnet), ihre erste Ableitung y' und die Variable, von der y abhängt (meist mit x bezeichnet), vorkommen. Also zum Beispiel $y = y'$ oder $\sin y + \sin y' = x$ oder $y' + e^{y'} = x + y$. Wir nehmen der Einfachheit zunächst immer an, dass die Gleichung so gegeben ist, dass y' nur auf der linken Seite vorkommt und dort allein steht; also Gleichungen der Form

$$y' = F(x, y),$$

wobei $F(x, y)$ ein gegebener Ausdruck (d.h. eine Funktion) in x und y ist. Genau genommen ist dies eine Kurzschreibweise. Sie bedeutet, dass man eine Funktion $I \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto y(x)$ sucht ($I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall), die die Gleichung

$$y'(x) = F(x, y(x))$$

für alle x im Definitionsbereich I von y erfüllt. Genauer gesagt werden wir zwei Typen von Problemen begegnen:

Problem 1: Bestimmung der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung. Das heißt: Bestimme alle Funktionen $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $y'(x) = F(x, y(x))$ für alle $x \in I$. Dabei sollen auch die maximalen Definitionsbereiche bestimmt werden.

Problem 2: Das **Anfangswertproblem (AWP)**: Gegeben ist ein Punkt (x_0, y_0) , zu bestimmen sind alle Lösungen y der Differentialgleichung, die zusätzlich die **Anfangsbedingung (AB)** $y(x_0) = y_0$ erfüllen. (Meistens wird es genau eine solche Lösung geben.)

Interpretiert man die Lösungen der Differentialgleichungen als Integralkurven des Vektorfeldes $V(x, y) = (1, F(x, y))$, siehe Satz 2.2.3, so entspricht Problem 1 dem Bestimmen *aller* Integralkurven von V und Problem 2 dem Bestimmen aller Integralkurven, die durch den Punkt (x_0, y_0) laufen. (Meistens gibt es davon nur eine.)

3.1 Der einfachste Fall: $y' = F(x)$

Beispiel: Sei folgende Differentialgleichung gegeben: $y' = x^2$. Es folgt:

$$\begin{aligned} y' &= x^2 \\ \Rightarrow y &= \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C \quad (C \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Also ist $y_C(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$ die allgemeine Lösung. Das heißt, es gibt unendlich viele Lösungen, für jedes $C \in \mathbb{R}$ eine.

Behandeln wir nun das AWP mit der Anfangsbedingung $y(0) = 2$. Dazu gibt es zwei Möglichkeiten:

$$(1) \text{ Einsetzen in die allgemeine Lösung: } y_C(0) = \frac{1}{3}0^3 + C = 2$$

$$\Rightarrow C = 2$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2$$

$$(2) \text{ Ohne die allgemeine Lösung: } y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x t^2 dt$$

$$\Rightarrow y(x) = 2 + \int_0^x t^2 dt$$

$$\Rightarrow y(x) = 2 + \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{3}x^3 + 2$$

3.1.1 Satz

Sei $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

Das Anfangswertproblem $y' = F(x)$, $y(x_0) = y_0$ hat eine eindeutige Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F(t) dt$$

Beweis: Zuerst zeigen wir, dass die Formel eine Lösung des Anfangswertproblems gibt: Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt, dass $y'(x) = 0 + F(x)$ für alle x gilt. Weiterhin ist $y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} F(t) dt = y_0$, also ist y eine Lösung.

Nun zeigen wir die Eindeutigkeit der Lösung. Falls z irgendeine Lösung ist, so muss gelten:

$$(y - z)' = y' - z' = F(x) - F(x) = 0 \text{ für alle } x \Rightarrow y - z = \text{const}$$

Also können sich die Lösungen nur um eine Konstante unterscheiden. Mit der Anfangsbedingung folgt:

$$y(x_0) = y_0, z(x_0) = y_0 \quad (y - z)(x_0) = y_0 - y_0 = 0$$

Also kann der Unterschied zwischen beiden Lösungen nur konstant 0 sein, also $y = z$. □

Beispiel: Sei folgende Differentialgleichung zu lösen: $y' = \frac{1}{x}$, $x \in (0, \infty)$, mit AB $y(2) = 5$.

Wir gehen folgendermaßen vor:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F(t) dt$$

$$\Rightarrow y(x) = 5 + \int_2^x \frac{1}{t} dt$$

$$\Rightarrow y(x) = 5 + \log x - \log 2$$

Fazit: Das Lösen der einfachsten Art von Differentialgleichung, $y' = F(x)$, ist äquivalent zum Integrieren von F .

3.2 Separation der Variablen

Beispiel: Gegeben sei die Differentialgleichung $y' = x \cdot y$. Wie wird diese Gleichung gelöst? Dazu ein Beispiel in 6 Schritten.

1. Schreibe $y' = \frac{dy}{dx}$ und forme dann (formal) um:

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = x dx \quad (y \neq 0)$$

Man separiert also die Variablen auf jeweils eine Seite.

2. Bilde das Integral:

$$\int \frac{dy}{y} = \int x dx$$

Bestimme dann die Stammfunktionen auf beiden Seiten separat und schreibe die Integrationskonstante nur auf eine Seite (günstig ist die rechte Seite).

$$\int \frac{dy}{y} = \int x dx \Rightarrow \log |y| = \frac{1}{2}x^2 + C$$

3. Löse nun nach y auf! (wenn möglich)

$$\log |y| = \frac{1}{2}x^2 + C \Leftrightarrow |y| = e^{\frac{1}{2}x^2 + C} \Leftrightarrow |y| = e^C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$$

Es ist $e^C > 0$, schreibe $e^C = \tilde{C}$

$$|y| = \tilde{C} \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$$

Nun untersuche, welche Lösungen es gibt:

$$\begin{aligned} |y| &= \tilde{C} \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}, \quad \tilde{C} > 0 \\ \Rightarrow y &= \tilde{C} \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \quad \text{oder} \quad y = -\tilde{C} \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \end{aligned}$$

4. Suche nach *vergessenen/verlorenen* Lösungen: In Schritt 1 mussten wir annehmen, dass $y \neq 0$ ist. Also ist zu überprüfen, ob es Lösungen gibt, die den Wert $y = 0$ annehmen. Dies ist der Fall: Die Funktion y , die konstant gleich Null ist, erfüllt $y'(x) = 0 = x \cdot y(x)$ für alle x .
5. Bilde die Allgemeine Lösung: Unsere in 3. und 4. gefundenen Lösungen lassen sich zusammenfassen.

$$y = C^* \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}, \quad C^* \in \mathbb{R},$$

ist die allgemeine Lösung; $y = 0$ ist als Lösung enthalten ($C^* = 0$).

6. Führe die Gegenprobe durch:

$$y' = C^* \cdot x \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} = x \cdot y$$

Bemerkung: In Schritt 4 stellt sich noch die Frage, ob es eine Lösung geben kann, die für gewisse x verschwindet, für andere aber nicht. Die Antwort ist Nein. Dies folgt aus der Eindeutigkeitsaussage am Ende von Satz 3.2.1 unten; denn wenn eine Lösung y bei x_0 verschwindet, erfüllt sie die AB $y(x_0) = 0$. Gleichzeitig erfüllt die Funktion $\bar{y} \equiv 0$ auch die Differentialgleichung und die AB $\bar{y}(x_0) = 0$. Wegen der Eindeutigkeit ist also $y = \bar{y}$, d.h. $y(x) = 0$ für *alle* x . Der Zusatz ist anwendbar, da hier $b(y) = y$, welches eine stetig differenzierbare Funktion von y ist.

Es stellt sich nun die Frage: Wann und warum funktioniert dieses Verfahren der Variablen-Separation? Das ist nicht selbstverständlich, denn die zwischendurch verwendeten formalen Ausdrücke $\frac{dy}{y}$ und $x dx$ haben für sich keinen Sinn.

3.2.1 Satz (Separation der Variablen)

Sei eine Differentialgleichung folgender Struktur gegeben:

$$y' = a(x) \cdot b(y)$$

a, b seien stetige Funktionen, $a : I \rightarrow \mathbb{R}$, $b : J \rightarrow \mathbb{R}$, $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle. Sei $b(y) \neq 0$ für alle $y \in J$, sei $B(y)$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{b(y)}$ und $A(x)$ eine Stammfunktion von $a(x)$. Dann ist

$$A(x) - B(y) = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

implizite Lösung der Differentialgleichung, das heißt:

Falls $y : I' \subset I \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion ist mit $A(x) - B(y(x)) = C$ für alle $x \in I'$ und falls $y(x) \in J$ für alle $x \in I'$ gilt, so ist y eine Lösung von $y' = a(x) \cdot b(y)$.

Falls $b(y_0) = 0$ für ein y_0 ist, so ist $y(x) = y_0$ für alle $x \in I$ eine Lösung.

Falls b stetig differenzierbar ist, so hat das Anfangswertproblem eine *eindeutige* Lösung.

Beachte, dass der Satz genau das oben durchgeführte Verfahren widerspiegelt.

Bemerkung: Man kann keine allgemeine Aussage darüber machen, ob das Intervall I' das ganze Intervall I ist oder nicht. Falls b nicht stetig differenzierbar ist, erhält man mit dem Satz eventuell nicht alle Lösungen. Siehe die Beispiele unten.

Beweis: Der Beweis des Satzes ist ausnahmsweise sehr kurz.

Leite $A(x) - B(y(x)) = C$ nach x ab, dann folgt:

$$\begin{aligned} \underbrace{A'(x)}_{a(x)} - y(x)' \cdot \underbrace{\left(\frac{B'(y(x))}{\frac{1}{b(y(x))}}\right)}_{\frac{1}{b(y(x))}} &= 0 \\ \Rightarrow y' &= a(x) \cdot b(y) \end{aligned}$$

(Ableiten ist erlaubt, denn A, B sind differenzierbar nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, da $a, \frac{1}{b}$ stetig sind.) Die Eindeutigkeitsaussage am Ende des Satzes werden wir später beweisen (Lemma 5.2.13). \square

Beispiel: Sei folgende Differentialgleichung gegeben: $y' = a \cdot y$, $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y' &= a \cdot y \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= a \cdot y \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{y} &= a \, dx \\ \Rightarrow \log |y| &= a \cdot x + C \\ \Rightarrow \dots & \\ \Rightarrow y_{\tilde{C}} &= \tilde{C} \cdot e^{a \cdot x} \quad (\tilde{C} \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

wobei die Punkte dieselben Überlegungen wie oben in Schritt 3 und 4 bedeuten. Dies ist die allgemeine Lösung.

Die folgenden Beispiele zeigen, was alles passieren kann beim Lösen einer Differentialgleichung.

▷ Beispiel: Die Lösung ist nicht überall dort definiert, wo die Gleichung sinnvoll ist. Ein Beispiel dazu:

$$\begin{aligned}
 y' &= y^2 \\
 \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= y^2 \\
 \Rightarrow \frac{dy}{y^2} &= dx \\
 \Rightarrow -\frac{1}{y} &= x + C \\
 \Rightarrow y_C &= -\frac{1}{x + C}
 \end{aligned}$$

Hier war $I = J = \mathbb{R}$, aber die Lösung ist nur auf dem Intervall $(-\infty, -C)$ oder $(-C, \infty)$ definiert!

Damit haben wir folgende Lösungen: Die Null-Funktion $y \equiv 0$ sowie für jedes $C \in \mathbb{R}$ die zwei Funktionen

$$y_C = -\frac{1}{x + C} \text{ auf } (-\infty, -C), \quad y_C = -\frac{1}{x + C} \text{ auf } (-C, \infty)$$

Dass man diese beiden als separate Lösungen betrachten muss, sieht man, wenn man ihre Graphen zeichnet: Es sind zwei disjunkte Integralkurven des Vektorfeldes $(1, y^2)$.

Welches das Definitionsintervall ist und was C ist, hängt von der Anfangsbedingung ab.

Beispiel: Anfangsbedingung $y(2) = 1$.

Einsetzen in die Formel für y ergibt $1 = -1/(2 + C)$, also $C = -3$. Da die Anfangsbedingung bei $x = 2 \in (-\infty, 3)$ gegeben war, ist die Lösung

$$y(x) = \frac{1}{3 - x}, \quad x \in (-\infty, 3).$$

▷ Beispiel: Die Gleichung $A(x) = B(y)$ lässt sich nicht explizit nach y auflösen. Ein Beispiel dazu wäre folgendes:

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{x}{y + \sin(y)} \\
 \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{x}{y + \sin(y)} \\
 \Rightarrow \int (y + \sin(y)) dy &= \int x dx \\
 \Rightarrow \frac{y^2}{2} - \cos(y) &= \frac{x^2}{2} + C
 \end{aligned}$$

Diese implizite Lösung können wir nicht nach y auflösen. Im Beispiel lässt sich jedoch zufällig nach x auflösen:

$$x = \pm \sqrt{2 \cdot \left(\frac{y^2}{2} - \cos(y) - C \right)}$$

d.h. immerhin können wir die Umkehrfunktion der Lösungen explizit angeben. Für eine vollständige Lösung wäre bei konkreter Anfangsbedingung noch C sowie das Existenzintervall zu bestimmen.

Bemerkung: Wir werden später Kriterien kennenlernen, wann sich eine implizite Lösung, also ein Ausdruck der Form $G(x, y) = 0$, nach y auflösen lässt (Satz über implizite Funktionen, Satz 7.3.3).

Bemerkung: Woher kommen Differentialgleichungen? Meistens steht die Beobachtung von gewissen Naturgesetzen am Anfang. Oft lassen sich diese Gesetze in Formeln fassen, das heißt mathematisch modellieren. Diese Formeln sind häufig Differentialgleichungen oder lassen sich zumindest durch Differentialgleichungen annähern. Um konkrete, sowohl qualitative als auch quantitative, Voraussagen über die so modellierten Prozesse machen zu können, müssen wir Lösungen für die gefundenen Gleichungen finden.

Beispiel: Ein einfaches Beispiel ist eine idealisierte Population in einer idealisierten Umgebung, d. h. kein Lebewesen stirbt jemals und jedes Lebewesen bekommt pro Zeiteinheit eine konstante Anzahl von Nachkommen. Formal:

$$y(t) = \text{Anzahl der Individuen zum Zeitpunkt } t$$

$$a = \text{Vermehrungsrate} = \text{Anzahl der Nachkommen pro Individuum pro Zeiteinheit (1)}$$

Falls nur zu den Zeitpunkten $t \in \mathbb{Z}$ Nachkommen produziert werden, folgt

$$y(t+1) = y(t) + a \cdot y(t)$$

Das heißt, zum Zeitpunkt $t+1$ gibt es soviele Individuen wie vorher ($y(t)$) *plus* die Anzahl der Nachkommen, die jedes Individuum bekommen hat ($a \cdot y(t)$). Die folgende Schreibweise wird uns gleich nützlicher sein:

$$y(t+1) - y(t) = a \cdot y(t)$$

Realistischer ist es jedoch, anzunehmen, dass zu beliebigen Zeiten $t \in \mathbb{R}$ (nicht bloß $t \in \mathbb{Z}$) Nachkommen produziert werden, und zwar in etwa gleichmäßig verteilt. Also werden es z.B. in einem Zeitintervall der Länge $\frac{1}{2}$ nur halb so viele Nachkommen geben wie in einem Zeitintervall der Länge 1. Allgemeiner für kleine h :

$$y(t+h) - y(t) = h \cdot a \cdot y(t) \quad \text{also:} \quad \frac{y(t+h) - y(t)}{h} = a \cdot y(t)$$

Zumindest für große Populationen ist dies auch für sehr kleine h sinnvoll, daher nähern wir diese Gleichung durch ihren Grenzfall für $h \rightarrow 0$ an und erhalten die Differentialgleichung

$$y'(t) = a \cdot y(t)$$

(Man merkt hier schon, dass allerhand Fragen auftauchen, z.B. ob dieses Modell, d.h. im Wesentlichen dieser Grenzübergang, gerechtfertigt ist. Dies ist Thema der Kunst der ›Modellierung‹. Das Modell beschreibt jedoch viele Populationen in gewissen Grenzen erstaunlich gut.)

Beispiel: Ein etwas komplizierteres Beispiel ist das Ausfließen von Flüssigkeiten aus einem Behälter. Hier – wie in den meisten physikalischen Prozessen – ergibt sich direkt eine Differentialgleichung, ohne weitere Approximationen. Wir idealisieren die Situation wieder und nehmen an, es handele sich um eine perfekt homogene Flüssigkeit, bei der auch keine Wirbel beim Ausfließen aus dem Loch entstehen.

Gesucht ist die Wasserstandshöhe $h(t)$ als Funktion von der Zeit t . Das sogenannte **Gesetz von Torricelli** besagt, dass die Ausflussgeschwindigkeit immer proportional zur Wurzel von h ist. Außerdem ist sie proportional zur Abnahmegeschwindigkeit der Höhe des Flüssigkeitsspiegels (wir nehmen an, dass der Behälter zylindrisch ist). Zusammengefasst, mit v als die Ausflussgeschwindigkeit ergibt sich:

$$v \propto \sqrt{h}$$

$$v \propto h'$$

Damit folgt:

$$h' \propto \sqrt{h} \quad \text{das heißt:} \quad h' = -a \cdot \sqrt{h} \quad \text{mit } a > 0 \text{ konstant}$$

Wir wählen $-a$ als Proportionalitätsfaktor, weil bei positiver Ausflussgeschwindigkeit der Flüssigkeitsspiegel absinkt. Die Größe a kann dabei aus dem Behälterquerschnitt, dem Lochquerschnitt und der Erdbeschleunigung bestimmt werden.

Wir vereinfachen die Gleichung etwas und betrachten stattdessen die Differentialgleichung

$$y' = \sqrt{y}$$

Die Gleichung für h lässt sich einfach auf diese zurückführen: Wie das gehen sollte, sehen wir am besten, indem wir $h' = \frac{dh}{dt}$ schreiben. Teilen wir die Gleichung $\frac{dh}{dt} = -a\sqrt{h}$ durch $-a$ und ziehen die Konstante $-a$ formal in das dt , ergibt sich $\frac{dh}{d(-at)} = \sqrt{h}$. Dies zeigt, dass wir die neue Variable $x = -at$ einführen und $y(x) = h(t) = h(-\frac{x}{a})$ setzen sollten. Damit ergibt sich dann tatsächlich

$$y'(x) = -\frac{1}{a}h'(-\frac{x}{a}) = -\frac{1}{a}(-a)\sqrt{h(-\frac{x}{a})} = \sqrt{y(x)}$$

Wir betrachten also die Gleichung $y' = \sqrt{y}$. Hierbei ist nur $y \geq 0$ zugelassen. Diese Gleichung können wir nun lösen:

▷ Die konstante Nullfunktion $y \equiv 0$ ist offensichtlich eine Lösung.

▷ Separation der Variablen:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y}} = dx \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \int dx \Rightarrow 2\sqrt{y} = x + C, C \in \mathbb{R} \Rightarrow y = \frac{1}{4}(x + C)^2$$

Probe:

$$y' = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot (x + C) = \frac{1}{2} \cdot (x + C)$$

$$\sqrt{y} = \frac{1}{2} |x + C|$$

Das heißt: $y = \frac{1}{4} \cdot (x + C)^2$ ist nur für $x + C \geq 0$ eine Lösung!

Die Frage ist, ob sich die Funktion y , die nur für $x \geq -C$ eine Lösung ist, zu einer Lösung auf ganz \mathbb{R} fortsetzen lässt.

Aus der Gleichung $y' = \sqrt{y}$ können wir ablesen, dass $y' \geq 0$ ist, das heißt jede Lösung y ist monoton wachsend. Da $y(-C) = 0$ ist und immer $y \geq 0$ sein muss, wäre also (wenn überhaupt) die einzige Möglichkeit, y nach links (für $x < -C$) zu einer Lösung fortzusetzen, durch

$$y_C(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} \cdot (x + C)^2 & \text{falls } x \geq -C \\ 0 & \text{falls } x \leq -C \end{cases}$$

gegeben. Wir stellen fest, dass y_C bei $x = -C$ differenzierbar ist und $y'_C(-C) = 0 = \sqrt{y_C(-C)}$ gilt, also ist y_C wirklich eine Lösung.

Es ergeben sich somit die folgenden Lösungen:

▷ $y \equiv 0$.

▷ $y_C, C \in \mathbb{R}$.

Als Lösung für unser ursprüngliches Problem lässt sich nun also angeben:

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} \cdot (-a \cdot t + C)^2 & \text{falls } t \leq \frac{C}{a} \\ 0 & \text{falls } t \geq \frac{C}{a} \end{cases}$$

Anschaulich ist diese Art der Lösung auch klar: Zu einem gewissen Zeitpunkt hat der Flüssigkeitsspiegel das untere Ende des Lochs erreicht und es kann nichts mehr herausfließen. Dann ist die Ausflussgeschwindigkeit gleich Null. Wenn der Spiegel immer unter dem Loch war, ergibt sich die konstante Null-Lösung.

Bemerkung: Das Anfangswertproblem $y' = \sqrt{y}$, $y(0) = 0$ hat unendlich viele Lösungen, nämlich jedes y_C mit $C < 0$.

Bisher hatten wir nur Differentialgleichungen, für die das Anfangswertproblem eindeutig lösbar war. Wie sich später zeigen wird, liegt hier eine besondere Situation vor, weil \sqrt{y} bei 0 nicht differenzierbar ist.

3.3 Die lineare Gleichung erster Ordnung

Beispiel: Wenn wir die Gleichung

$$y' = y - x \quad \text{bzw.} \quad \frac{dy}{dx} = y - x$$

betrachten, so stellen wir fest, dass wir hier die Variablen nicht separieren können: Man kann die Gleichung nicht so umformen, dass links nur Ausdrücke in y und rechts nur Ausdrücke in x stehen (denn in $y' = \frac{dy}{dx}$ steckt auch das x drin!)

Die Gleichung $y' = y - x$ hat aber eine andere besondere Eigenschaft, die eine Lösung erlaubt: Sie ist linear. Um das zu sehen, schreiben wir sie um in die Form

$$P(y) = b$$

wobei $P(y) = y' - y$ und die Funktion b durch $b(x) = -x$ gegeben ist. P ist eine lineare Abbildung $P : C^1(\mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R})$, wobei $C^1(\mathbb{R})$ der Vektorraum der stetig differenzierbaren Funktionen auf \mathbb{R} und $C^0(\mathbb{R})$ der Vektorraum der stetigen Funktionen auf \mathbb{R} ist (oft auch mit $C(\mathbb{R})$ bezeichnet). Linearität bedeutet, dass für alle $y_1, y_2 \in C^1(\mathbb{R})$ und alle $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$P(y_1 + y_2) = P(y_1) + P(y_2)$$

$$P(c \cdot y) = c \cdot P(y)$$

(nachrechnen!) Lineare Gleichungen der Form $P(y) = b$ kennen wir aus der linearen Algebra. Von dort ist der folgende Satz bekannt, der auch hier sehr nützlich ist.

3.3.1 Satz

Seien V, W Vektorräume, $P : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung und $b \in W$. Außerdem sei $v_{inh} \in V$ so, dass $P(v_{inh}) = b$. Dann gilt:

$$\{v : P(v) = b\} = \{v_{inh} + v_h : P(v_h) = 0\}$$

Man sagt:

Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung $P(v) = b$

=

eine spezielle Lösung der *inhomogenen* Gleichung

+

allgemeine Lösung der zugeordneten *homogenen* Gleichung $P(v) = 0$

Beispiel (Fortsetzung des Beispiels): Unser anfängliches Problem, die Differentialgleichung $y' - y = -x$ zu lösen, hat sich nun auf zwei einfacher zu lösende Probleme reduziert:

- (1) Finde die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y' - y = 0$.
- (2) Finde *eine* spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung $y' - y = -x$.

Diese beiden Aufgaben lösen wir:

- (1) $y'_h - y_h = 0 \implies y_h(x) = C \cdot e^x$, $C \in \mathbb{R}$ (haben wir schon mit Separation der Variablen gemacht).
- (2) Die spezielle Lösung finden wir mit Hilfe eines Ansatzes, der sich **Variation der Konstanten** nennt: Wir versuchen, eine Lösung in folgender Form zu finden: $y_{inh}(x) = c(x) \cdot e^x$. Wir setzen in die Gleichung ein und bestimmen daraus $c(x)$:

$$y'_{inh} - y_{inh} = (c(x) \cdot e^x)' - c(x) \cdot e^x = c'(x) \cdot e^x + c(x) \cdot e^x - c(x) \cdot e^x = c'(x) \cdot e^x$$

Gleichzeitig soll $y'_{inh} - y_{inh} = -x$ sein. Hieraus folgt:

$$c'(x) = -x \cdot e^{-x} \implies c(x) = - \int x \cdot e^{-x} dx = \dots = (x+1) \cdot e^{-x}$$

Unsere inhomogene Lösung ergibt sich also zu $y_{inh} = (x+1) \cdot e^{-x} \cdot e^x = x+1$. Insgesamt folgt:

$$y(x) = C \cdot e^x + x + 1, \quad C \in \mathbb{R}$$

Dieses Verfahren lässt sich wie folgt verallgemeinern:

3.3.2 Satz

Seien $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Man findet die allgemeine Lösung von $y'(x) = a(x) \cdot y(x) + b(x)$ wie folgt:

- (1) Löse die homogene Gleichung, zum Beispiel mit Hilfe der Variablentrennung.
Man erhält $y_h(x) = C \cdot e^{A(x)}$, wobei $A(x) = \int a(x) dx$ eine beliebige Stammfunktion von a ist.
- (2) Mache den Ansatz $y_{inh}(x) = c(x)e^{A(x)}$. Einsetzen in die Differentialgleichung und Integrieren ergibt dann $c(x) = \int b(x)e^{-A(x)} dx$, und es folgt: $y_{inh} = e^{A(x)} \cdot \int b(x)e^{-A(x)} dx$.

Damit erhält man die allgemeine Lösung:

$$y(x) = \left[C + \int b(x)e^{-A(x)} dx \right] \cdot e^{A(x)}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Alle diese Lösungen sind auf ganz I definiert, und das Anfangswertproblem $y(x_0) = y_0$ hat eine eindeutige Lösung für alle $x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}$.

Beachte: In einer konkret gegebenen Differentialgleichung muss das Definitionsintervall I manchmal erst gefunden werden; siehe das zweite Beispiel weiter unten.

Beweis: Wir zeigen den Satz, indem wir die Anweisungen der einzelnen Schritte befolgen.

- (1) Wir betrachten die homogene Gleichung:

$$\begin{aligned} y'(x) - a(x) \cdot y(x) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} &= a(x) \\ \Rightarrow \frac{dy}{y(x)} &= a(x) dx \\ \Rightarrow \int \frac{1}{y(x)} dy &= \int a(x) dx \\ \Rightarrow \log |y(x)| &= A(x) + C' \quad C' \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow y &= C \cdot e^{A(x)} \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(wie vorher mit Fallunterscheidungen).

Hier ist ein hübscher Trick, wie man die homogene Gleichung auch anders lösen kann. Natürlich mit demselben Ergebnis – aber man vermeidet die formale Umformung und die Fallunterscheidungen der Variablentrennung: Sei A eine Stammfunktion zu a . Dann

$$\begin{aligned} y'(x) - a(x) \cdot y(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow e^{-A(x)} \cdot y'(x) - a(x) \cdot e^{-A(x)} \cdot y(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left[e^{-A(x)} \cdot y(x) \right]' &= 0 \\ \Leftrightarrow e^{-A(x)} \cdot y(x) \text{ ist konstant} &= C \\ \Leftrightarrow y_h(x) &= C \cdot e^{A(x)} \end{aligned}$$

Dies zeigt auch, dass es keine weiteren Lösungen geben kann. Das hatten wir bisher nicht bewiesen (vgl. die letzte Aussage in Satz 3.2.1).

- (2) Zum Beweis, dass y_{inh} eine Lösung der inhomogenen Gleichung ist, bräuchten wir die gegebene Formel nur einzusetzen und nachzurechnen, dass die Gleichung erfüllt ist. Es ist aber instruktiver

(und leichter zu merken), die Herleitung zu kennen.

Wir machen den Ansatz $y_{inh} = c(x) \cdot e^{A(x)}$ und setzen ein:

$$\begin{aligned} & \left(c(x) \cdot e^{A(x)} \right)' - a(x) \cdot \left(c(x) \cdot e^{A(x)} \right) = b \\ \Leftrightarrow & c'(x) \cdot e^{A(x)} + c(x) \cdot a(x) \cdot e^{A(x)} - a(x) \cdot c(x) \cdot e^{A(x)} = b \\ \Leftrightarrow & c'(x) = b(x) e^{-A(x)} \\ \Leftrightarrow & c(x) = \int b(x) e^{-A(x)} dx \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$y_{inh} = e^{A(x)} \cdot \int b(x) e^{-A(x)} dx$$

Die inhomogene und homogene Lösung addiert ergibt dann die allgemeine Lösung:

$$y(x) = y_h(x) + y_{inh}(x) = C \cdot e^{A(x)} + e^{A(x)} \cdot \int b(x) e^{-A(x)} dx = \left[C + \int b(x) e^{-A(x)} dx \right] \cdot e^{A(x)} \quad \square$$

Beispiel: Löse die Differentialgleichung

$$y'(x) = \underbrace{\frac{2x}{x}}_{=a(x)} \cdot y(x) + \underbrace{\frac{x}{b(x)}}_{b(x)} \quad \text{und das AWP } y(1) = 0.$$

Wir wenden den obigen Satz an:

$$(1) \quad A(x) = x^2, \text{ also } y_h(x) = C \cdot e^{x^2}.$$

$$(2) \quad y_{inh}(x) = c(x) \cdot e^{x^2} \text{ mit } c(x) = \int x e^{-x^2} = -\frac{1}{2} e^{-x^2}, \text{ und es folgt } y_{inh} = -\frac{1}{2}.$$

Insgesamt erhalten wir die allgemeine Lösung:

$$y(x) = -\frac{1}{2} + C \cdot e^{x^2}$$

Beachten Sie, dass man hier bei den unbestimmten Integralen die Integrationskonstanten weglassen kann, da sie alle bloß zu der Konstanten C beitragen würden.

Wir bestimmen nun C so, dass $y(1) = -\frac{1}{2} + C \cdot e = 0$. Es folgt direkt $C = \frac{1}{2e}$, also löst

$$y(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2e} \cdot e^{x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e} e^{x^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(e^{x^2-1} - 1 \right)$$

das gestellte Anfangswertproblem.

Beispiel: (Wie man mit den lästigen Betragszeichen umgeht)

Löse die Differentialgleichung $y' = \frac{y}{x}$.

Hier ist $a(x) = \frac{1}{x}$, also $A(x) = \log|x|$ und $e^{A(x)} = |x|$.

Können wir also folgern, dass die allgemeine Lösung $y = C|x|$ ist?

Nein! Das kann schon deshalb nicht stimmen, weil die Funktion $|x|$ bei $x = 0$ nicht differenzierbar ist, also die Differentialgleichung nicht erfüllen kann. Was haben wir falsch gemacht?

Die Gleichung ist nur für $x \neq 0$ definiert. Das ist die Vereinigung der Intervalle $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$. Für jedes dieser beiden Intervalle separat können wir Satz 3.3.2 anwenden. Auf $(0, \infty)$, also für $x > 0$, ist $y = C|x| = Cx$, und auf $(-\infty, 0)$, also für $x < 0$, ist $y = C|x| = -Cx$. Da mit C auch $-C$ eine beliebige Konstante ist, können wir statt $-C$ auch C schreiben. Wir erhalten also als Lösungen:

$$y = Cx, \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{auf } (0, \infty)$$

$$y = Cx, \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{auf } (-\infty, 0)$$

Nochmal deutlich: Die Konstante der Lösungen auf $(0, \infty)$ hat mit der Konstante Lösungen auf $(-\infty, 0)$ nichts zu tun.

Wollte man wirklich die allgemeine Lösung auf $\mathbb{R} \setminus \{0\} = [-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ hinschreiben, so wäre diese

$$y(x) = \begin{cases} C_1 x & \text{falls } x > 0 \\ C_2 x & \text{falls } x < 0 \end{cases} \quad \text{für zwei beliebige Konstanten } C_1, C_2.$$

Meistens ist es jedoch sinnvoller, nur auf Intervallen definierte Lösungen zu betrachten, und so wird es in dieser Vorlesung auch weiterhin gehandhabt.

4 Lineare Differentialgleichungen

Im letzten Kapitel haben wir unter anderem lineare Differentialgleichungen erster Ordnung betrachtet. Nun wenden wir uns den allgemeineren linearen Gleichungen n -ter Ordnung zu:

Kann man eine Gleichung in die Form

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x)$$

bringen, wobei a_n nicht konstant gleich Null ist, so spricht man von einer **linearen Gleichung n -ter Ordnung**.

Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $a_1, \dots, a_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen. Dann ist $P : C^n(I) \rightarrow C^0(I)$, $P(y) = a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y$ eine lineare Abbildung! Hierbei ist $C^n(I)$ die Menge der n mal stetig differenzierbaren Funktionen.

Wie wir aus Satz 3.3.1 wissen, hat die Lösungsmenge der Gleichung

$$P(y) = b$$

daher die Form $\{v_{inh} + v_h : P(v_h) = 0\}$, wobei v_{inh} eine Lösung der Gleichung $P(v_{inh}) = b$ ist. Das heißt, die allgemeine Lösung von $P(y) = b$ lässt sich als ›spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung‹ + ›allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $P(y) = 0$ ‹ bestimmen.

4.1 Der Vektorraum der Funktionen

Sei M eine Menge und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} .

Wir wiederholen nun einige Grundbegriffe der Linearen Algebra im Kontext des Vektorraums $V = \mathcal{F}(M, \mathbb{K})$, der Menge der Funktionen von M nach \mathbb{K} . Analog bezeichnet $C^n(I, \mathbb{K})$ den Vektorraum der n -mal stetig differenzierbaren Funktionen $I \rightarrow \mathbb{K}$, für ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Statt $C^n(I, \mathbb{R})$ schreiben wir auch oft $C^n(I)$.

Neben den reellwertigen ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) betrachten wir auch komplexwertige Funktionen ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$), vor allem aus folgendem Grund: Obwohl die meisten Differentialgleichungen reell sind (d.h. nur reelle Zahlen in ihnen vorkommen) und wir hauptsächlich an ihren reellwertigen Lösungen interessiert sind, ist es oft einfacher, zunächst die komplexwertigen Lösungen zu bestimmen und dann aus diesen die reellwertigen. Siehe Satz 4.3.2.

Allerdings wird der *Definitionsbereich* der Funktionen immer eine Teilmenge von \mathbb{R} sein.

4.1.1 Definition

Seien $f_1, \dots, f_N : M \rightarrow \mathbb{K}$ Funktionen. Eine **\mathbb{K} -Linearkombination** von f_1, \dots, f_N ist eine Funktion der Form $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_N f_N$ mit $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{K}$.

$\{f_1, \dots, f_N\}$ heißt **\mathbb{K} -linear unabhängig**, wenn gilt: Gilt für eine Linearkombination

$$\alpha_1 f_1(x) + \dots + \alpha_N f_N(x) = 0 \text{ für alle } x, \text{ so folgt } \alpha_1 = \dots = \alpha_N = 0.$$

Eine beliebige Menge S von Funktionen $M \rightarrow \mathbb{K}$ heißt **\mathbb{K} -linear unabhängig**, wenn jede endliche Teilmenge von S \mathbb{K} -linear unabhängig ist.

Falls unwichtig oder aus dem Kontext klar ist, was \mathbb{K} ist, sagt man auch einfach Linearkombination statt \mathbb{K} -Linearkombination etc.

Bemerkung: Äquivalent zur linearen Unabhängigkeit von f_1, \dots, f_N ist:

Keine der Funktionen f_i lässt sich als Linearkombination der übrigen Funktionen f_j schreiben, d. h. für jedes i gilt: Es gibt *keine* $\beta_1, \dots, \beta_N \in \mathbb{K}$ (mit $\beta_i = 0$, wegen des Worts »übrigen«) mit $f_i = \beta_1 f_1 + \dots + \beta_N f_N$.

Beispiele:

(1) Schauen wir uns die Funktionen \sin, \cos auf \mathbb{R} an. Sie sind \mathbb{C} -linear unabhängig, denn:

Seien $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ so, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\alpha_1 \sin(x) + \alpha_2 \cos(x) = 0$$

Es folgt für $x = 0$: $\alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 = 0$, also $\alpha_2 = 0$. Andererseits folgt für $x = \frac{\pi}{2}$: $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 = 0$, also $\alpha_1 = 0$.

Damit folgt insgesamt: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

(2) Betrachten wir $f_0, \dots, f_N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_i(x) = x^i$ für $i = 0, \dots, N$. Auch diese Funktionen sind linear unabhängig. Dies folgt direkt aus dem Identitätssatz für Polynome: Hat ein Polynom $a_0 + a_1 x + \dots + a_N x^N$ für alle $x \in \mathbb{R}$ den Wert Null, so folgt $a_0 = \dots = a_N = 0$.

(3) Sind die Funktionen $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = \sin(x)$, $f_2(x) = \cos(x)$, $f_3(x) = \sin(x + \varphi)$ linear unabhängig?

Nein, denn nach einem der Additionstheoreme für den Sinus gilt:

$$\sin(x + \varphi) = \sin(x) \cdot \cos(\varphi) + \cos(x) \cdot \sin(\varphi)$$

Also lässt sich $\sin(x + \varphi)$ als Linearkombination von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ schreiben. Mit obiger Alternativcharakterisierung der linearen (Un-)Abhängigkeit folgt also die Behauptung.

(4) Die Funktionen $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f_1(x) = \sin(x)$, $f_2(x) = \cos(x)$, $f_3(x) = e^{ix}$ sind \mathbb{R} -linear unabhängig, aber \mathbb{C} -linear *abhängig*!

Die \mathbb{C} -lineare Abhängigkeit folgt aus der Eulerschen Identität:

$$e^{ix} = 1 \cdot \cos(x) + i \cdot \sin(x)$$

Für reelle Koeffizienten sind f_1, f_2, f_3 aber linear unabhängig, denn:

Seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ so, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\alpha_1 \sin(x) + \alpha_2 \cos(x) + \alpha_3 e^{ix} = 0$$

Für $x = 0$ folgt $\alpha_2 + \alpha_3 = 0$. Für $x = \frac{\pi}{2}$ folgt $\alpha_1 + i\alpha_3 = 0$. Da α_1, α_3 reell sind, folgt daraus $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ und damit auch $\alpha_2 = 0$.

4.1.2 Definition

Sei U ein Untervektorraum von $\mathcal{F}(M, \mathbb{K})$. Dann ist

$$\dim U := \dim_{\mathbb{K}} U := \max\{n \in \mathbb{N} : v_1, \dots, v_n \in U \text{ sind } \mathbb{K}\text{-linear unabhängige}\}$$

die (\mathbb{K} -)Dimension von U .

Falls es unendlich viele (\mathbb{K} -)linear unabhängige Elemente aus U gibt, so sei

$$\dim U := \infty$$

Beispiel: Es sei $N \in \mathbb{N}$. Die Menge $\{f : f \text{ ist ein Polynom auf } \mathbb{R} \text{ mit } \deg f \leq N\}$ hat die Dimension $N + 1$, denn die Funktionen $1, x, \dots, x^N$ sind linear unabhängig und alle weiteren Polynome in dieser Menge lassen sich bereits als Linearkombinationen davon darstellen.

Die Menge aller Polynome auf \mathbb{R} (von beliebigem Grad) hat Dimension unendlich. Damit ist auch $\dim \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{K}) = \infty$.

4.1.3 Definition

Es sei U ein Untervektorraum von $\mathcal{F}(M, \mathbb{K})$ mit $\dim U < \infty$. Eine **Basis** von U ist eine $\dim U$ -elementige Menge von linear unabhängigen Elementen aus U .

Bemerkung: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- ▷ $\{f_1, \dots, f_d\}$ ist eine Basis von U .
- ▷ f_1, \dots, f_d sind linear unabhängig und d ist maximal, d.h. es gibt kein f_{d+1} , so dass f_1, \dots, f_{d+1} linear unabhängig sind.
- ▷ $\{f_1, \dots, f_d\}$ ist ein Erzeugendensystem von U und d ist minimal, d.h. lässt man eines der f_i weg, bilden die übrigen kein Erzeugendensystem mehr.
- ▷ Jeder Vektor aus U lässt sich *eindeutig* als Linearkombination der f_i schreiben:

$$\forall v \in U \exists^1 (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{K}^d : w = \sum_{i=1}^d \alpha_i f_i$$

Für den Beweis von Satz 4.3.2, das zentrale Ergebnis dieses Kapitels, brauchen wir folgende Aussage:

4.1.4 Satz

Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ paarweise verschieden. dann ist die Menge der Funktionen $f_{ij} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$, $f_{ij}(x) = x^j e^{\lambda_i x}$ für $i = 1, \dots, k$ und $j = 0, \dots, N$ linear unabhängig.

Zum Beweis brauchen wir:

4.1.5 Lemma

Sei p ein Polynom mit $\deg p = n$ und $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dann ist

$$\frac{d}{dx} (p(x)e^{\mu x}) = \tilde{p}(x)e^{\mu x},$$

wobei \tilde{p} ein Polynom ist und $\deg \tilde{p} = \deg p$.

Beweis: Unter obigen Voraussetzungen gilt:

$$\frac{d}{dx} (p(x)e^{\mu x}) = p'(x)e^{\mu x} + \mu p(x)e^{\mu x} = \underbrace{(\mu p(x) + p'(x))}_{\tilde{p}(x)} e^{\mu x}$$

Dabei ist $\deg p' = n - 1$, und da $\mu \neq 0$ ist, gilt $n = \deg(\mu p + p') = \deg \tilde{p}$. □

Beweis (von Satz 4.1.4): Fasst man in einer Linearkombination der f_{ij} immer die Terme mit demselben i zusammen, so erhält man eine Funktion der Form $p_1(x)e^{\lambda_1 x} + \dots + p_k(x)e^{\lambda_k x}$, wobei p_1, \dots, p_k Polynome sind.

Es ist also zu zeigen: Falls p_1, \dots, p_k Polynome sind und

$$(*) \quad p_1(x)e^{\lambda_1 x} + \dots + p_k(x)e^{\lambda_k x} = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

gilt, so folgt, dass $p_1 \equiv p_2 \equiv \dots \equiv p_k \equiv 0$.

Beweis dieser Aussage: Multiplizieren von $(*)$ mit $e^{-\lambda_k x}$ liefert

$$(**) \quad p_1(x)e^{\mu_1 x} + \dots + p_{k-1}(x)e^{\mu_{k-1} x} + p_k(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

wobei $\mu_i = \lambda_i - \lambda_k$. Hierbei sind μ_1, \dots, μ_{k-1} paarweise verschieden und ungleich Null, da $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ paarweise verschieden sind.

Wir zeigen nun die Behauptung mit Induktion über k :

Induktionsanfang ($k = 1$): Nach (***) ist $p_1(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, was zu zeigen war.

Induktionsschritt ($k - 1 \rightsquigarrow k$): Es sei $d = \deg p_k$. Leite Gleichung (***) $(d + 1)$ -mal ab: Man erhält

$$P_1(x)e^{d+1x} + \dots + P_{k-1}(x)e^{d+1x} = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

wobei P_i aus p_i durch $(d + 1)$ -maliges Anwenden von Lemma 4.1.5 entsteht, für jedes $i \in \{1, \dots, k - 1\}$.

Nach dem Lemma gilt also $\deg P_i = \deg p_i$ für alle i .

Nach Induktionsvoraussetzung folgt nun $P_i \equiv 0$ und damit $p_i \equiv 0$ (wegen $\deg P_i = \deg p_i$) für alle $i \in \{1, \dots, k - 1\}$.

Mit Gleichung (***) folgt dann $p_k \equiv 0$, was zu zeigen war.

Bemerkung: Wofür war die Aussage $\deg \tilde{p} = \deg p$ wichtig? Wäre $\deg \tilde{p} < \deg p$ möglich, so könnte man aus $P_i \equiv 0$ nicht $p_i \equiv 0$ folgern! \square

Bemerkung zur Notation: $p \equiv 0$ bedeutet, dass $p(x) = 0$ für alle x . Man sagt: p verschwindet identisch. Stattdessen kann man auch einfach $p = 0$ schreiben (in Worten: p ist gleich der Nullfunktion). Man findet auch in manchen Büchern die Schreibweise $p(x) \equiv 0$ für denselben Sachverhalt.

Bemerkung zu Polynomen: In der Algebra unterscheidet man zwischen Polynomen und den durch sie definierten Funktionen. Das ist vor allem im Zusammenhang mit endlichen Körpern wichtig, da dort ein Polynom, dessen Koeffizienten nicht alle Null sind, trotzdem die Nullfunktion ergeben kann. In der Analysis ist man fast ausschließlich an Funktionen auf \mathbb{R} (oder \mathbb{R}^n) oder deren offenen Teilmengen interessiert. Hier gilt der Identitätssatz für Polynome, also ist hier diese Unterscheidung unnötig.

4.2 Die homogene lineare Gleichung n -ter Ordnung

Nun werden wir die gewonnenen Erkenntnisse aus dem vorherigen Kapitel anwenden.

Betrachte die Gleichung

$$y'' + y = 0$$

Beispiellösungen (geraten):

$$0, \sin(x), \cos(x), e^{ix} \rightsquigarrow \alpha_1 \sin(x) + \alpha_2 \cos(x) \quad (\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}) \text{ allgemeine Lösung?}$$

Erinnerung:

$$\triangleright y' = a(x)y \rightsquigarrow \text{allg. Lösung: } ce^{A(x)} \text{ mit } c \in \mathbb{R}, A(x) = \int a(x) dx.$$

\triangleright Die Menge der Lösungen $\{ce^{A(x)} : c \in \mathbb{R}\}$ ist ein eindimensionaler Vektorraum; die Basis dieser Menge ist $\{e^{A(x)}\}$ und diese hat genau ein Element.

\triangleright Die Vorgabe eines Anfangswertes wählt eindeutig eine Lösung aus.

Idee: Der Lösungsraum der obigen Gleichung ist ein 2-dimensionaler Vektorraum und zwei Anfangswerte bestimmen eine Lösung eindeutig. Allgemein gilt:

4.2.1 Satz

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $a_{n-1}, \dots, a_0 : I \rightarrow \mathbb{K}$ stetige Funktionen. Wir betrachten die folgende Gleichung:

$$(*) \quad y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

Dann gilt:

- (1) Sei $x_0 \in I$. Zu beliebigen $y_0, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{K}$ gibt es genau eine Lösung $y \in C^n(I, \mathbb{K})$ von (*), so dass $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$.
- (2) Die Menge \mathcal{L} der Lösungen von (*) ist ein n -dimensionaler Untervektorraum von $C^n(I, \mathbb{K})$, und die Abbildung $\mathcal{L} \rightarrow \mathbb{K}^n, y \mapsto (y(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0))$ ist ein Isomorphismus für jedes $x_0 \in I$.

Wichtig: Der Koeffizient von $y^{(n)}$ im Satz ist Eins. Ist die Gleichung allgemeiner wie am Anfang des Kapitels gegeben, muss man erst durch $a_n(x)$ teilen. Falls a_n Nullstellen hat, macht das einen wichtigen Unterschied: Satz 4.2.1 muss dann separat auf jedes Intervall, auf dem $a_n \neq 0$ ist, angewendet werden!

Beweis:

- (1) Dies wird später allgemeiner gezeigt. Siehe Satz 5.5.3 und die Bemerkung nach Definition 5.5.1.
- (2) Mit y und \tilde{y} erfüllen offenbar auch $y + \tilde{y}$ sowie cy (für $c \in \mathbb{K}$) die homogene Gleichung (Einsetzen!). Also ist \mathcal{L} ein Untervektorraum. Die Bijektivität ist gerade die Aussage von (1): Surjektivität bedeutet die Existenz der Lösung in (1), Injektivität bedeutet die Eindeutigkeit. \square

Beispiel: $y'' + y = 0 \implies \mathcal{L} = \text{span}_{\mathbb{C}}\{\sin, \cos\}$

4.2.2 Definition

Ein **Fundamentalsystem (FS)** einer Differentialgleichung $P(y) = 0$ ist eine Basis des Lösungsraumes dieser Gleichung.

Satz 4.2.1 sagt also, dass eine lineare Gleichung n -ter Ordnung ein Fundamentalsystem besitzt, das aus n Funktionen besteht.

Beispiele: Wie in obigem Beispiel erkenntlich, ist $\{\sin, \cos\}$ ein (\mathbb{C} -)Fundamentalsystem der Gleichung $y'' + y = 0$. Aber auch $\{f_1, f_2\}$ mit $f_1(x) = e^{ix}$ und $f_2(x) = e^{-ix}$ ist ein Fundamentalsystem, denn es gilt

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} & e^{ix} &= \cos x + i \sin x \\ \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} & e^{-ix} &= \cos x - i \sin x, \end{aligned}$$

und für jeden Vektorraum U gilt: Ist $M \subset U$, so ist auch $\text{span}(M) \subset U$. Hier gilt nun aber:

- ▷ $\{\sin x, \cos x\} \subset \text{span}_{\mathbb{C}}\{e^{ix}, e^{-ix}\}$, also auch $\text{span}_{\mathbb{C}}\{\sin x, \cos x\} \subset \text{span}_{\mathbb{C}}\{e^{ix}, e^{-ix}\}$
- ▷ $\{e^{ix}, e^{-ix}\} \subset \text{span}_{\mathbb{C}}\{\sin x, \cos x\}$, also auch $\text{span}_{\mathbb{C}}\{e^{ix}, e^{-ix}\} \subset \text{span}_{\mathbb{C}}\{\sin x, \cos x\}$

Insgesamt folgt also $\text{span}_{\mathbb{C}}\{\sin x, \cos x\} = \text{span}_{\mathbb{C}}\{e^{ix}, e^{-ix}\}$.

4.3 Lineare Gleichungen mit konstanten Koeffizienten: Homogene Gleichungen

Für $n > 1$ gibt es kein allgemeines Lösungsverfahren für lineare Gleichungen. Im Spezialfall konstanter Koeffizienten aber schon. Wir betrachten hier zunächst die homogene Gleichung.

Frage: Wie findet man die allgemeine Lösung, oder äquivalent ein Fundamentalsystem, für die Gleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C})? \quad (*)$$

Anstatt die Lösung direkt zu präsentieren, werden wir uns Schritt für Schritt herarbeiten.

Erinnerung: Die Lösung von $y' = ay$ ist $y(x) = Ce^{ax}$.

Idee: Für (*) mache den Ansatz: $y(x) = e^{\lambda x}$, wobei $\lambda \in \mathbb{C}$ zu bestimmen ist. Leite n -mal ab:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\lambda x} \\ \Rightarrow y'(x) &= \lambda e^{\lambda x} \\ \Rightarrow y''(x) &= \lambda \cdot \lambda e^{\lambda x} = \lambda^2 e^{\lambda x} \\ &\vdots \\ \Rightarrow y^{(n)}(x) &= \lambda^n e^{\lambda x} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} & y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y \\ &= \lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \dots + a_1\lambda e^{\lambda x} + a_0e^{\lambda x} \\ &= (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also: $y(x) = e^{\lambda x}$ ist Lösung genau dann, wenn $\underbrace{\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0}_{=p(\lambda)} = 0$.

$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ heißt **charakteristisches Polynom** der Gleichung (*).

Beispiele:

- ▷ Löse $y'' + y = 0$. Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 + 1 = 0$, somit sind die Nullstellen $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Lösungen: e^{ix} , e^{-ix} .
- ▷ Löse $y'' - y = 0$. Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 - 1 = 0$, somit sind die Nullstellen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Lösungen: e^x , e^{-x} .

Beachte, dass alle Linearkombinationen dieser beiden Lösungen wieder Lösungen sind. Im ersten Beispiel erhält man so zum Beispiel $\sin x$ und $\cos x$.

Seien nun $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ die verschiedenen Nullstellen von p . Wegen $\deg p = n$ ist $k \leq n$.

Der einfache Fall: $k = n$

Das heißt, das charakteristische Polynom habe n verschiedene, einfache Nullstellen. Wir haben die Lösungen $e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$. Nach Satz 4.1.4 sind diese linear unabhängig, sie bilden somit ein Fundamentalsystem; d. h., jede Lösung ist von der Form

$$y(x) = \alpha_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n x} \quad \text{mit } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}.$$

Frage: Was passiert für $k < n$?

Das heißt, das charakteristische Polynom hat mindestens eine mehrfache Nullstelle.

Beispiele:

- (1) Löse: $y'' = 0$. Dies ist das einfachste Beispiel. Das charakteristische Polynom ist $p(\lambda) = \lambda^2$, die einzige Nullstelle $\lambda = 0$. Das ist eine doppelte Nullstelle.

Allgemeine Lösung: $ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{C}$. Denn $(y')' = 0$, also y' konstant gleich a , somit $y = ax + \text{Konstante}$. Damit ist $\{1, x\}$ ein Fundamentalsystem der Gleichung $y'' = 0$.

- (2) Löse $y'' - 2y' + y = 0$. Dies ist komplizierter. Kann man das Vorgehen bei $y'' = 0$ imitieren? Das charakteristische Polynom ist $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$, die einzige Nullstelle $\lambda = 1$.

Eine Lösung ist e^x .

Frage: Wie sehen weitere Lösungen aus? Bei $y'' = 0$ haben wir die Gleichung zweiter Ordnung auf zwei Gleichungen erster Ordnung zurückgeführt. Geht das auch für die Gleichung $y'' - 2y' + y = 0$? Die Antwort ist ja, und das sieht man am besten mit Hilfe der Operatorschreibweise.

Operatorschreibweise

Schreibe zur Abkürzung $D = \frac{d}{dx}$. Wir betrachten D als Operator, d. h. als Abbildung von Funktionen nach Funktionen. Statt $D(y)$ schreiben wir auch kürzer Dy .

Also $y' = \frac{d}{dx}y = Dy$ und $y'' = (y')' = D(y') = D(Dy) = D^2y$, wobei $D^2 = D \circ D$.

Übertragen auf unser Beispiel:

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + y &= 0 \\ \Leftrightarrow D^2y - 2Dy + y &= 0 \\ \Leftrightarrow (D^2 - 2D + 1)y &= 0 \\ \Leftrightarrow (D - 1)^2y &= 0 \end{aligned}$$

Warum konnten wir so umformen? Prüfen wir es nach:

$$\left. \begin{aligned} (D - 1)^2 &= (D - 1) \circ (D - 1) \\ &= D \circ D - 1 \circ D - D \circ 1 + 1 \circ 1 \\ &= D^2 - D - D + 1 \\ &= D^2 - 2D + 1 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow (D - 1) \underbrace{((D - 1)y)}_z = 0$$

Hierbei steht 1 für Multiplikation mit 1, also den Identitätsoperator, der y in y überführt.

Dies können wir in ein System von zwei Gleichungen erster Ordnung umschreiben, die wir nacheinander lösen können:

$$\begin{aligned} (1) \quad (D - 1)z &= 0 && \text{(d. h. } z' - z = 0) \\ (2) \quad (D - 1)y &= z && \text{(d. h. } y' - y = z) \end{aligned}$$

Lösung von (1): $z = C_1 e^x$

Lösung von (2):

$$\begin{aligned} y' - y &= C_1 e^x \\ y &= c(x)e^x \\ \Rightarrow c'(x)e^x &= C_1 e^x \\ \Rightarrow c'(x) &= C_1 \\ \Rightarrow c(x) &= C_1 x + C_2 \end{aligned}$$

Wir haben erhalten: Die allgemeine Lösung der Gleichung $y'' - 2y' + y = 0$ ist $y = C_1 x e^x + C_2 e^x$. Ein Fundamentalsystem ist demnach $\{e^x, x e^x\}$. Dass diese Funktionen linear unabhängig sind, zeigt Satz 4.1.4. Diese Idee wollen wir nun verallgemeinern. Zunächst betrachten wir statt $(D - 1)^2$ allgemeiner $(D - a)^n$. Folgendes Lemma erleichtert dabei die Rechnung:

4.3.1 Lemma

Sei $a \in \mathbb{C}, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ n -mal differenzierbar. Dann ist $(D - a)^n(f(x)e^{ax}) = \underbrace{(D^n f)}_{f^{(n)}}(x)e^{ax}$.

Beweis: Für $n = 1$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} (D - a)(f e^{ax}) &= (f e^{ax})' - a f e^{ax} \\ &= f' e^{ax} + f a e^{ax} - a f e^{ax} \\ &= f' e^{ax} \end{aligned}$$

Wende dies n -mal an, z. B. $n = 2$:

$$\begin{aligned} (D - a)^2(f e^{ax}) &= (D - a)[(D - a)(f e^{ax})] \\ &= (D - a)(f' e^{ax}) \\ &= (f')' e^{ax} = f'' e^{ax} \end{aligned}$$

□

Beispiel: Wir betrachten den Fall mit einer Nullstelle ($k = 1$, n beliebig).

Das charakteristische Polynom ist $p(\lambda) = (\lambda - a)^n$. Die Gleichung lautet: $(D - a)^n y = 0$.

Wir suchen nun eine Lösung der Form $y = f(x)e^{ax}$. Nach dem Lemma ist $(D - a)^n (f e^{ax}) = f^{(n)} e^{ax}$. Dies ist $\equiv 0 \Leftrightarrow f^{(n)} \equiv 0 \Leftrightarrow f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{n-1} x^{n-1}$.

Damit erhalten wir die Lösungen $e^{ax}, x e^{ax}, \dots, x^{n-1} e^{ax}$.

Da dies n linear unabhängige Funktionen sind, bilden sie ein Fundamentalsystem, d. h. wir haben (bis auf Linearkombinationen) *alle* Lösungen gefunden.

4.3.2 Satz

Das Polynom $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$ habe die verschiedenen komplexen Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ mit den Vielfachheiten m_1, \dots, m_k .

Dann hat die Gleichung $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$ das Fundamentalsystem

$$\left. \begin{array}{l} e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{m_1-1} e^{\lambda_1 x} \quad m_1 \text{ Stück} \\ \vdots \\ e^{\lambda_k x}, x e^{\lambda_k x}, \dots, x^{m_k-1} e^{\lambda_k x} \quad m_k \text{ Stück} \end{array} \right\} m_1 + \dots + m_k = n \text{ Stück}$$

Schreibweise:

Für ein Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

schreiben wir

$$p(D) = D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0$$

Also ist

$$p(D)y = y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y$$

Beweis:

(1) Die angegebenen Funktionen sind Lösungen:

Nach Voraussetzung und Standard-Algebra können wir faktorisieren:

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}. \text{ Daraus folgt}$$

$p(D) = (D - \lambda_1)^{m_1} \dots (D - \lambda_k)^{m_k}$, wobei die Reihenfolge der Faktoren bei $p(\lambda)$ und daher auch bei $p(D)$ beliebig vertauscht werden kann.

Betrachte zunächst $y = x^j e^{\lambda_k x}$ mit $j \leq m_k - 1$. Nach dem vorangehenden Beispiel ist $(D - \lambda_k)^{m_k} y = 0$ und damit auch

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y &= p(D)y \\ &= (D - \lambda_1)^{m_1} \dots (D - \lambda_k)^{m_k} y = 0 \end{aligned}$$

das heißt, y ist eine Lösung. Für die anderen Funktionen, d. h. $y = x^j e^{\lambda_i x}$ für $j \leq m_i - 1$, verfährt man analog, bringt aber zunächst in der Faktorisierung den Faktor $(D - \lambda_i)^{m_i}$ nach hinten.

(2) Diese Funktionen sind linear unabhängig. Das folgt aus Satz 4.1.4.

(3) Damit haben wir $m_1 + \dots + m_k = n$ linear unabhängige Lösungen. Da n die Ordnung der Gleichung ist, müssen diese ein Fundamentalsystem bilden. \square

Beispiel: Löse $y''' + 4y'' + 4y' = 0$. Das charakteristische Polynom ist:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^3 + 4\lambda^2 + 4\lambda \\ &= \lambda(\lambda^2 + 4\lambda + 4) \\ &= \lambda(\lambda + 2)^2 \end{aligned}$$

Somit ist $\{1, e^{-2x}, x e^{-2x}\}$ ein Fundamentalsystem.

Der reelle Fall

Seien $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Aus dem allgemeinen Satz 4.2.1 folgt, dass es ein Fundamentalsystem reellwertiger Lösungen gibt. Aber p könnte trotzdem Nullstellen $\lambda \notin \mathbb{R}$ haben, und dann ist $e^{\lambda x}$ nicht reell. Wie findet man reelle Lösungen?

Beobachtung: Sei $p(\lambda)$ reelles Polynom und λ_0 eine m -fache Nullstelle, $\lambda_0 \notin \mathbb{R}$. Dann ist auch $\overline{\lambda_0}$ (das komplex konjugierte von λ_0) eine m -fache Nullstelle. Schreibe dann

$$\lambda_0 = \mu + iv$$

$$\overline{\lambda_0} = \mu - iv$$

mit $\mu, v \in \mathbb{R}$. Aus dem Satz erhält man Lösungen:

$$f_j(x) = x^j e^{\lambda_0 x} = x^j e^{\mu x + ivx} = x^j e^{\mu x} e^{ivx}$$

$$g_j(x) = x^j e^{\overline{\lambda_0} x} = x^j e^{\mu x - ivx} = x^j e^{\mu x} e^{-ivx}$$

für $j = 0, \dots, m-1$. Daraus erhält man Lösungen:

$$\frac{f_j + g_j}{2} = x^j e^{\mu x} \cos(vx)$$

$$\frac{f_j - g_j}{2i} = x^j e^{\mu x} \sin(vx), \quad j = 0, \dots, m_0 - 1$$

Da die f_j, g_j linear unabhängig sind, sind es auch diese neuen Funktionen. Damit ergibt sich sofort folgender Satz.

4.3.3 Satz

Das Polynom $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ habe reelle Koeffizienten a_{n-1}, \dots, a_0 . Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die verschiedenen reellen Nullstellen von p , mit Vielfachheiten m_1, \dots, m_r , sowie $\mu_1 \pm iv_1, \dots, \mu_c \pm iv_c$ die verschiedenen nicht-reellen Nullstellen von p , mit Vielfachheiten m'_1, \dots, m'_c . Dann hat die Gleichung $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$ das Fundamentalsystem

$$\begin{array}{ll} x^j e^{\lambda_1 x}, & j = 0, \dots, m_1 - 1 \\ \vdots & \vdots \\ x^j e^{\lambda_r x} & j = 0, \dots, m_r - 1 \\ x^j e^{\mu_1 x} \cos v_1 x, \quad x^j e^{\mu_1 x} \sin v_1 x & j = 0, \dots, m'_1 - 1 \\ \vdots & \vdots \\ x^j e^{\mu_c x} \cos v_c x, \quad x^j e^{\mu_c x} \sin v_c x & j = 0, \dots, m'_c - 1 \end{array}$$

Beispiel: Löse $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$. Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 \\ &= (\lambda^2 + 1)^2 \\ &= [(\lambda + i)(\lambda - i)]^2 \\ &= (\lambda + i)^2(\lambda - i)^2 \end{aligned}$$

Wegen $i = 0 + 1i$ erhält man das Fundamentalsystem $\{\cos x, \sin x, x \cos x, x \sin x\}$.

4.4 Konstante Koeffizienten, spezielle Inhomogenitäten

Wie bestimmt man eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f ?$$

Die Methode der Variation der Konstanten lässt sich von linearen Gleichungen 1. Ordnung auf lineare Gleichungen n -ter Ordnung verallgemeinern (hierfür ist es unwichtig, ob die Koeffizienten konstant sind – solange man ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung kennt). Siehe Kapitel 4.6 für den Fall $n = 2$ sowie Satz 5.5.17 für lineare Systeme erster Ordnung – jede lineare Gleichung n -ter Ordnung kann auf ein solches System reduziert werden.

Für spezielle Inhomogenitäten f lässt sich aber eine Lösung sehr einfach angeben. Wir betrachten hier nur den Fall $f(x) = e^{\mu x}$ für ein $\mu \in \mathbb{C}$.

Wir betrachten also die Gleichung

$$(*) \quad p(D)y = e^{\mu x}$$

mit $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$.

Idee: Wir erinnern uns an die Rechnung zu Beginn des Kapitels 4.3. In unserer Kurzschreibweise ergab diese:

$$p(D)e^{\mu x} = p(\mu)e^{\mu x}$$

Beachte, dass rechts die Funktion $e^{\mu x}$ einfach mit der Zahl $p(\mu)$ multipliziert wird. Um (*) zu lösen, versuchen wir den Ansatz $y = be^{\mu x}$, $b \in \mathbb{C}$. Wegen $p(D)(be^{\mu x}) = bp(D)(e^{\mu x}) = bp(\mu)e^{\mu x}$ müssen wir dann b so wählen, dass $bp(\mu) = 1$ gilt. Wir haben zwei Fälle:

(1) Nicht-Resonanz-Fall: $p(\mu) \neq 0$. Wir erhalten die Lösung $y = \frac{1}{p(\mu)}e^{\mu x}$.

(2) Resonanz-Fall: $p(\mu) = 0$.

(Der Begriff Resonanz-Fall ist durch physikalische Schwingungen motiviert und wird später erklärt.)

Offenbar kann kein b gefunden werden, d. h. es gibt keine Lösung der angenommenen Form. Wie finden wir einen besseren Ansatz?

Idee: Schreibe $p(\lambda) = q(\lambda)(\lambda - \mu)^m$, wobei q ein Polynom mit $q(\mu) \neq 0$ ist. Die vorige Idee lässt sich dann für q anwenden. Es bleibt das Problem, eine Lösung z der Gleichung $(D - \mu)^m z = e^{\mu x}$ zu finden. Lemma 4.3.1 legt nahe, hierzu $z(x) = f(x)e^{\mu x}$ zu schreiben – dann muss f so bestimmt werden, dass $f^{(m)} = 1$. Das ist einfach: $f(x) = x^m/m!$

Setzt man alles zusammen, erhält man:

4.4.1 Satz

Sei $\mu \in \mathbb{C}$ eine m -fache ($m \geq 0$) Nullstelle von p .

Dann hat die Gleichung $p(D)y = e^{\mu x}$ die spezielle Lösung $y = bx^m e^{\mu x}$ mit $b = \frac{1}{p^{(m)}(\mu)}$.

Beweis: Schreibe $p(\lambda) = q(\lambda)(\lambda - \mu)^m$, wobei q ein Polynom mit $q(\mu) \neq 0$ ist. Nach Lemma 4.3.1 ist $(D - \mu)^m(x^m e^{\mu x}) = (D^m x^m)e^{\mu x} = m!e^{\mu x}$. Weiterhin gilt $p^{(m)}(\mu) = m!q(\mu)$, wie man leicht nachrechnet (oder so begründet: Die Taylorentwicklung von p um den Punkt μ hat als ersten nicht-verschwindenden Term $q(\mu)(\lambda - \mu)^m$, und dies muss nach der Taylor-Formel gleich $\frac{p^{(m)}(\mu)}{m!}(\lambda - \mu)^m$ sein). Damit folgt

$$p(D)(x^m e^{\mu x}) = q(D)(D - \mu)^m(x^m e^{\mu x}) = q(D)m!e^{\mu x} = m!q(D)e^{\mu x} = m!q(\mu)e^{\mu x} = p^{(m)}(\mu)e^{\mu x}$$

und dividieren durch $p^{(m)}(\mu)$ gibt das Ergebnis. \square

Bemerkung: Auf ähnliche Weise lässt sich auch die Gleichung $p(D)y = x^k e^{\mu x}$ lösen – man muss aber etwas aufpassen: Selbst im Nicht-Resonanzfall $p(\mu) \neq 0$ hat die Lösung nicht einfach die Form $y = bx^k e^{\mu x}$, sondern man muss auch Terme mit niedrigerer x -Potenz zulassen, also $y = (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0)e^{\mu x}$. Um die b_i berechnen, setzt man dies am einfachsten in die Gleichung ein, teilt durch $e^{\mu x}$ und macht dann Koeffizientenvergleich.

Lösung durch Komplexifizierung

Ähnlich wie bei der Integration von Ausdrücken wie $\sin x e^x$ ist es auch bei Differentialgleichungen oft nützlich, \sin und \cos als Imaginär- bzw. Realteil von e^{ix} aufzufassen.

Beispiel: Löse $y' - y = \cos x$.

1. Schreibe $\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix})$. Löse $z' - z = e^{ix}$.
2. Setze $y = \operatorname{Re}(z)$. Dies gibt eine Lösung, weil $\operatorname{Re}(z)' = (\operatorname{Re} z)'$, also

$$y' - y = \operatorname{Re}(z' - z) = \operatorname{Re}(e^{ix}) = \cos x, \text{ somit:}$$

$$y' - y = \cos x$$

$$z' - z = e^{ix} \quad (\mu = i)$$

Das charakteristische Polynom ist $p(\lambda) = \lambda - 1$. Wegen $p(\mu) \neq 0$ ergibt sich die Lösung

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{p(\mu)} e^{\mu x} = \frac{1}{i-1} e^{ix} = \frac{i+1}{(i+1)(i-1)} e^{ix} \\ &= -\frac{i+1}{2} (\cos x + i \sin x) = -\frac{1}{2} [i \cos x + \cos x - \sin x + i \sin x] \end{aligned}$$

$$\text{somit } y = \operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2} [\cos x - \sin x]$$

Den Hauptgrund, warum dies funktioniert, formulieren wir noch einmal allgemein:

4.4.2 Lemma

Sei $p(\lambda)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten. Ist f eine komplex-wertige Funktion und z eine komplex-wertige Lösung der Gleichung $p(D)z = f$, so gilt

$$p(D)(\operatorname{Re} z) = \operatorname{Re} f, \quad p(D)(\operatorname{Im} z) = \operatorname{Im} f$$

Beweis: Man nehme Real- und Imaginärteil der Gleichung $p(D)z = z^{(n)} + a_{n-1}z^{(n-1)} + \dots + a_1z + a_0 = f$ und beachte, dass man die Zahlen a_i aus Re bzw. Im herausziehen kann, da sie reell sind. \square

4.5 Schwingungen

Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung treten bei der Beschreibung von Schwingungen auf. Mit den Methoden, die wir gelernt haben, kann man viele Phänomene, die man bei Schwingungen beobachten kann, quantitativ verstehen.

Wir betrachten ein Gewicht, das an einer Feder hängt, und wollen beschreiben, wie es schwingt, wenn wir an der Feder ziehen und loslassen. Das heißt, wir wollen die Funktion $t \mapsto y(t)$ finden, wobei t die Zeit und $y(t)$ die vertikale Auslenkung der Feder bezeichnet. $y = 0$ bezeichne die Gleichgewichtslage (wenn die Feder in Ruhe bleibt).

Vorgehensweise: Wir werden zunächst aus physikalischen Gesetzen eine Gleichung für y herleiten und diese dann lösen. Zunächst ist

$$y'(t) = \text{Geschwindigkeit zur Zeit } t$$

$$y''(t) = \text{Beschleunigung zur Zeit } t$$

Wir verwenden nun drei physikalische Gesetze: Die von Newton, Stokes und Hooke.

Newton: Masse \cdot Beschleunigung = Kraft (auf den Körper).

$$m \cdot y'' = F_{\text{Feder}} + F_{\text{Reibung}} + F_{\text{Extern}} \quad (m = \text{Masse des Körpers})$$

Hierbei ist F_{Feder} die Kraft, die die Feder aufgrund ihrer Elastizität auf das Gewicht ausübt, F_{Reibung} der Einfluss der Reibung (z. B. innere Reibung der Feder oder Gleitreibung, wenn das Gewicht auf einer schrägen Unterlage gleitet) sowie F_{Extern} eine äußere, auf das Gewicht einwirkende Kraft (z. B. durch ein »Anstoßen« bewirkt). Die Gravitationskraft taucht hier nicht auf, da wir annehmen, dass die Aufhängung der Feder sie ausgleicht.

Hooke: Die Rückstellkraft der Feder ist proportional zur Auslenkung und wirkt ihr entgegen

$$F_{\text{Feder}} = -H \cdot y \quad (H > 0)$$

$H =$ Federkonstante

Stokes: Die Reibung ist proportional zur Geschwindigkeit

$$F_{\text{Reibung}} = -k \cdot y' \quad (k \geq 0)$$

(Dies ist oft, aber nicht immer realistisch. Bei hohen Geschwindigkeiten wird zum Beispiel der Luftwiderstand dominant, er ist proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit.)

Wir erhalten aus den drei Gesetzen:

$$m \cdot y'' + k \cdot y' + H \cdot y = F_{\text{Extern}}, \text{ also}$$

$$y'' + r \cdot y' + \omega^2 y = f \quad \left(r = \frac{k}{m}, \omega = \sqrt{\frac{H}{m}}, f = \frac{F_{\text{Extern}}}{m} \right)$$

Wir betrachten nun verschiedene interessante Spezialfälle, vom einfachsten zu komplizierten.

Freie Schwingung: $f = 0$

Ungedämpft ($r = 0$)

Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 + \omega^2$, mit Nullstellen $\pm i\omega$. Die allgemeine Lösung ist daher

$$y(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$$

$$\text{oder äquivalent: } y(t) = C \cos(\omega t - \varphi)$$

Man nennt dies eine **harmonische Schwingung**. ω heißt die **Eigenfrequenz** (oder charakteristische Frequenz) des schwingenden Systems.

Hierbei sind c_1, c_2 bzw. C, φ beliebige reelle Zahlen.

Übung (eigentlich zur Analysis I): Seien c_1, c_2 reelle Zahlen, nicht beide gleich Null. Dann gibt es genau ein $C > 0$ und ein $\varphi \in \mathbb{R}$, das bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π eindeutig bestimmt ist, so dass für alle t gilt $c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) = C \cos(\omega t - \varphi)$.

Gedämpft ($r > 0$)

$y'' + ry' + \omega^2 y = 0$. Das charakteristische Polynom $\lambda^2 + r\lambda + \omega^2$ hat die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 - \omega^2}$$

Kleine Reibung: $\frac{r}{2} < \omega$. Setze $\omega_r = \sqrt{\omega^2 - \frac{r^2}{4}}$, dann

$$y(t) = e^{-\frac{r}{2}t} \underbrace{(c_1 \cos(\omega_r t) + c_2 \sin(\omega_r t))}_{=C \cdot \cos(\omega_r t - \varphi)}$$

Dies ist eine **gedämpfte Schwingung**: Oszillationen, die mit der Zeit exponentiell kleiner werden. Beachte:

- ▷ Nur die Amplitude wird mit der Zeit kleiner, die Frequenz ist konstant.
- ▷ $\omega_r < \omega$, d. h. die Reibung macht die Schwingung langsamer.

Große Reibung: $\frac{r}{2} > \omega$.

$$\lambda_1 = -\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 - \omega^2}$$

$$\lambda_2 = -\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 - \omega^2}$$

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

Dies ist eine **aperiodische Schwingung**: Es findet gar keine Oszillation statt, weil die Reibung zu groß ist. Wegen $\lambda_{1,2} < 0$ nähert sich die Feder der Gleichgewichtslage exponentiell. Dieser Fall würde z.B. auftreten, wenn sich das Gewicht in einer sehr zähen Flüssigkeit bewegt.

Der Fall $\frac{r}{2} = \omega$.

$$y(t) = c_1 e^{-\frac{r}{2}t} + c_2 t e^{-\frac{r}{2}t}$$

Dies ist auch eine aperiodische Schwingung, die ebenfalls exponentiell abklingt.

Erzwungene (angeregte) Schwingung: $f \neq 0$

Wir betrachten nur eine periodische Anregung: $f(x) = \cos(\alpha t)$, $\alpha > 0$. Zum Beispiel: Nimm die Federaufhängung in die Hand und schwinde sie auf und ab.

Ungedämpft ($r = 0$)

$$y'' + \omega^2 y = \cos(\alpha t)$$

$$z'' + \omega^2 z = e^{i\alpha t}$$

(Komplexifizierung.) Charakteristisches Polynom: $p(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2$.

Nicht-Resonanz-Fall: $p(i\alpha) \neq 0$, d. h. $\alpha \neq \omega$.

$$z_{\text{inh}}(t) = \frac{1}{p(i\alpha)} \cdot e^{i\alpha t} = \frac{1}{\omega^2 - \alpha^2} e^{i\alpha t}$$

$$\Rightarrow y_{\text{inh.,spez.}} = \frac{1}{\underbrace{\omega^2 - \alpha^2}_{\text{groß, falls } \alpha \text{ nahe } \omega}} \cdot \cos(\alpha t)$$

$$y_{\text{inh.,allg.}} = \frac{1}{\omega^2 - \alpha^2} \cos(\alpha t) + c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$$

- ▷ Die Schwingung ist eine Überlagerung von zwei Schwingungen verschiedener Frequenz: Der anregenden Frequenz α und der federeigenen Frequenz ω .
- ▷ Je näher die anregende Frequenz α an der Eigenfrequenz ω des Systems liegt, desto dominanter ist bei der Überlagerung die Schwingung mit der Frequenz α .

Resonanz-Fall: $\alpha = \omega$.

$$\begin{aligned} z_{\text{inh.,spez.}} &= \frac{1}{p'(i\alpha)} t e^{i\alpha t} = \frac{1}{2i\alpha} t e^{i\alpha t} \\ &= -\frac{1}{2\alpha} t i e^{i\alpha t} = -\frac{1}{2\alpha} t (i \cos(\alpha t) - \sin(\alpha t)) \end{aligned}$$

$$y_{\text{inh.,spez.}} = \text{Re}(z_{\text{inh.,spez.}}) = \frac{1}{2\alpha} t \sin(\alpha t)$$

$y_{\text{inh.,spez.}}$ ist unbeschränkt! Die Schwingungen werden mit der Zeit immer größer, bis die Feder kaputtgeht!
Realistisch ist natürlich immer Reibung da:

Gedämpft ($r > 0$)

$$y'' + ry' + \omega^2 y = \cos(\alpha t)$$

Wie oben sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\lambda_{1,2} = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 - \omega^2}$$

Diese haben Realteil $\neq 0$, sind also $\neq i\alpha$, d. h. es tritt *keine Resonanz* auf.

Mit etwas Rechnung erhält man die spezielle Lösung

$$y_{\text{inh., spez.}}(t) = A \cos(\alpha t - \varphi)$$

mit Amplitude $A = 1/\sqrt{(\omega^2 - \alpha^2)^2 + r^2\alpha^2}$ und **Phasenverschiebung** $\varphi = \arctan \frac{r\alpha}{\omega^2 - \alpha^2}$ (genauer: φ ist das Argument der komplexen Zahl $(\omega^2 - \alpha^2) + ir\alpha$).

Die allgemeine homogene Lösung hat Frequenz ω , klingt aber exponentiell ab (siehe oben unter freie Schwingung), d. h.:

- ▷ Nach einiger Zeit ist nur noch $y_{\text{inh., spez.}}$ zu beobachten,
- ▷ dann schwingt die Feder in derselben Frequenz wie die äußere Anregung,
- ▷ jedoch mit einer Phasenverschiebung.

Die Phasenverschiebung bedeutet, dass die Federschwingung der anregenden Schwingung hinterherhinkt – das kann man gut beobachten!

4.6 Die inhomogene lineare Gleichung 2. Ordnung. Die Greensche Funktion

Wie funktioniert das Verfahren der Variation der Konstanten bei linearen Gleichungen höherer Ordnung? Wir werden das im Fall der Ordnung 2 zeigen. Betrachte also

$$\underbrace{y'' + p(x)y' + q(x)y}_{P[y]} = f(x)$$

mit $p, q, f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf dem Intervall I .

Wir lassen hier auch variable Koeffizienten p, q zu, da das Verfahren für diese genauso funktioniert wie für konstante Koeffizienten.

Nach Satz 4.2.1 hat die homogene Gleichung $P(y) = 0$ einen 2-dimensionalen Lösungsraum, es gibt also ein Fundamentalsystem $\{y_1, y_2\}$. Die allgemeine Lösung des homogenen Systems ist $y_{\text{hom}} = c_1 y_1 + c_2 y_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Wir ersetzen nun *beide* Konstanten c_1, c_2 durch Funktionen:

$$\text{Ansatz: } y(x) = c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x)$$

$$\text{Dann folgt } y'(x) = c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_1(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) + c_2(x) \cdot y_2'(x)$$

Leiten wir dies noch einmal ab, erscheinen (unter anderem) zweite Ableitungen von c_1, c_2 . Dies möchten wir vermeiden. Daher machen wir eine zweite Annahme als Teil des Ansatzes:

$$\text{Ansatz, zweiter Teil: } c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0$$

Dann folgt

$$y'(x) = c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x)$$

$$\text{also } y''(x) = c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_1(x) \cdot y_1''(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) + c_2(x) \cdot y_2''(x)$$

Setzt man nun y, y' und y'' in die Gleichung $y'' + py' + qy = f$ ein, so erhält man

$$\begin{aligned} y'' + py' + q &= c'_1 y'_1 + c_1 y''_1 + p c_1 y'_1 + q c_1 y_1 + c'_2 y'_2 + c_2 y''_2 + p c_2 y'_2 + q c_2 y_2 \\ &= c'_1 y'_1 + c_1 \underbrace{(y''_1 + p y'_1 + q y_1)}_{=0} + c'_2 y'_2 + c_2 \underbrace{(y''_2 + p y'_2 + q y_2)}_{=0} \\ &= c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 \end{aligned}$$

Also ist $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ genau dann Lösung der Gleichung $y'' + py' + qy = f$, wenn gilt:

$$\begin{aligned} c'_1 y_1 + c'_2 y_2 &= 0 \\ c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 &= f \end{aligned}$$

(Bemerkung: Im Beispiel auf Seite 96 werden wir dieses System noch einmal auf andere Weise herleiten – für den Fall, dass Ihnen die Methode hier zu unmotiviert erschien.)

Hierbei sind y_1, y_2, f bekannte Funktionen, und c_1, c_2 sind gesucht. Dies ist ein lineares Gleichungssystem für c'_1, c'_2 . Man kann dies z. B. mittels der Cramerschen Regel lösen. Dabei tritt die Determinante der Koeffizientenmatrix $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{pmatrix}$ auf. Diese hat einen Namen:

4.6.1 Definition

$$W = W[y_1, y_2] = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{pmatrix} = y_1 \cdot y'_2 - y'_1 \cdot y_2 \text{ heißt } \mathbf{Wronski-Determinante} \text{ von } y_1, y_2.$$

W ist eine Funktion von x , da y_1, y_2 es sind.

Mit der Cramerschen Regel folgt dann $c'_1 = -\frac{y_2 f}{W}$, $c'_2 = \frac{y_1 f}{W}$.

Der Nenner ist niemals Null:

4.6.2 Lemma

Seien y_1, y_2 zwei Lösungen von $P(y) = 0$. Es gilt dann:

$$y_1, y_2 \text{ sind linear unabhängig} \iff (W[y_1, y_2])(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$$

Beweis: Erinnerung: Nach Satz 4.2.1 gilt für alle x :

$$\{\text{Lösungen } y \text{ von } P(y) = 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2, y \mapsto \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} \text{ ist ein Isomorphismus.}$$

Also y_1, y_2 linear unabhängig $\iff \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y'_1(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2(x) \\ y'_2(x) \end{pmatrix}$ linear unabhängig.

Dies wiederum ist äquivalent zu $W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{pmatrix} \neq 0$. □

Aus den Formeln für c'_1 und c'_2 sowie dem Ansatz erhalten wir als Resultat:

$$y_{\text{inh}} = -y_1 \cdot \int \frac{y_2 f}{W} + y_2 \cdot \int \frac{y_1 f}{W}$$

Dies ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung, wenn man die unbestimmte Integrale jeweils mit einer unbestimmten Konstante auswertet.

Wir betrachten nun das Anfangswertproblem, der Einfachheit halber mit den Anfangswerten $y(x_0) = y'(x_0) = 0$, für ein $x_0 \in I$. Es hat folgende Lösung.

4.6.3 Satz

Sei y_1, y_2 ein Fundamentalsystem für den linearen Differentialoperator P (der variable Koeffizienten haben darf). Dann hat das Anfangswertproblem

$$P(y) = f, y(x_0) = y'(x_0) = 0$$

genau eine Lösung, und diese ist gegeben durch

$$y(x) = \int_{x_0}^x G(x, t) \cdot f(t) dt,$$

$$\text{wobei } G(x, t) = \frac{-y_1(x)y_2(t) + y_1(t)y_2(x)}{W(t)}$$

$G(x, t)$ heißt **Greensche Funktion** für das Anfangswertproblem von P .

Beweis:

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^x \frac{-y_1(x)y_2(t) + y_1(t)y_2(x)}{W(t)} f(t) dt \\ &= y_1(x) \cdot \int_{x_0}^x \frac{-y_2(t)f(t)}{W(t)} dt + y_2(x) \cdot \int_{x_0}^x \frac{y_1(t)f(t)}{W(t)} dt \end{aligned}$$

erfüllt $P(y) = f$ nach der Herleitung oben. $y(x_0) = 0$ ist klar, $y'(x_0) = 0$ rechnet man leicht nach. Damit ist das angegebene y eine Lösung. Es bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen. Sind y, \tilde{y} zwei Lösungen des Anfangswertproblems, so erfüllt deren Differenz $z = y - \tilde{y}$ die homogene Gleichung $Pz = Py - P\tilde{y} = f - f = 0$ mit Anfangswerten $z(x_0) = y(x_0) - \tilde{y}(x_0) = 0$, $z'(x_0) = y'(x_0) - \tilde{y}'(x_0) = 0$. Nach Satz 4.2.1 muss $z \equiv 0$ sein, also $y \equiv \tilde{y}$. \square

Hier ist uns zum ersten Mal ein zentrales Konzept der Analysis begegnet.

4.6.4 Definition

Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $K : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$. Eine Abbildung $Q : C^0(I) \rightarrow C^0(I)$ der Form

$$(Qf)(x) = \int_I K(x, t) f(t) dt$$

heißt **Integraloperator**. Die Funktion K heißt der **Integralkern** des Operators Q .

$$\text{Hier: } K(x, t) = \begin{cases} G(x, t) & \text{falls } x_0 < t < x \\ -G(x, t) & \text{falls } x < t < x_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir betrachten die Aussage von Satz 4.6.3 nun unter einem anderen Blickwinkel:

Sei $V = \{y \in C^2(I) : y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0\}$ und $W = C^0(I)$. Dann sind V, W Vektorräume, und $P : V \rightarrow W$ ist linear.

Satz 4.6.3 sagt dann: $P : V \rightarrow W$ ist bijektiv, und sein Inverses $P^{-1} : W \rightarrow V$ ist der Integraloperator, dessen Integralkern durch die Greensche Funktion wie oben beschrieben gegeben ist.

Dies ist ein allgemeines Phänomen:

Das Inverse eines linearen Differentialoperators (falls es existiert) ist ein Integraloperator.

Dies ist eine grobe Kurzfassung; wie oben beschrieben muss man Anfangsbedingungen stellen, damit man überhaupt von einem Inversen reden kann.

Sie kennen dies übrigens in einem Spezialfall schon: Das Inverse der Differentiation ist die Integration. Das ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Bemerkung: Integraloperatoren sind offensichtlich lineare Abbildungen auf dem unendlich-dimensionalen Vektorraum der stetigen Funktionen (jedenfalls für stetiges K), und ihre definierende Formel verallgemeinert in natürlicher Weise die Darstellung einer linearen Abbildung auf \mathbb{R}^n mittels Matrizen:

$$(Av)_i = \sum_{j=1}^n A_{ij}v_j$$

Die Summe wird durch ein Integral ersetzt und die Indizes i, j durch x, t .

5 Differentialgleichungssysteme erster Ordnung

Bisher haben wir immer eine einzelne Differentialgleichung betrachtet, und es war *eine* (reell- oder komplexwertige) Funktion gesucht. In vielen Situationen hat man mehrere Differentialgleichungen gegeben, und es sollen mehrere Funktionen gefunden werden, die diese Gleichungen simultan erfüllen. Zum Beispiel ist das Finden von Integralkurven von Vektorfeldern ein solches Problem.

Wir werden in 5.1 sehen, dass eine Gleichung n -ter Ordnung äquivalent ist zu einem System von n Gleichungen erster Ordnung (mit n unbekannt Funktionen). Analog kann man in einem System mehrerer Gleichungen höherer Ordnung jede Gleichung durch mehrere Gleichungen erster Ordnung ersetzen.

Also bilden die Systeme erster Ordnung die allgemeinste Form der Differentialgleichungsprobleme. In den Sektionen 5.2 und 5.3 werden allgemeine Sätze zur Existenz, Eindeutigkeit und Parameterabhängigkeit von Lösungen solcher Systeme bewiesen. Danach werden wir einige Methoden kennenlernen, wie man für autonome Systeme zumindest die Form der Orbits untersuchen kann. Dann werden wir lineare Systeme betrachten und für den Fall konstanter Koeffizienten explizite Lösungsmethoden kennenlernen.

5.1 Reduktion beliebiger Differentialgleichungen auf Systeme 1. Ordnung

Eine Differentialgleichung n -ter Ordnung ($n \in \mathbb{N}$) lässt sich immer in folgender Form schreiben:

$$y^{(n)} = G(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (*)$$

(In diesem Kapitel verwenden wir durchgehend die Notation t für die unabhängige Variable, wegen der oft naheliegenden Interpretation als Zeit.) Hierbei ist G eine gegebene Funktion, also ein Ausdruck in seinen Argumenten, z. B. $G(t, y, y') = \frac{t+y}{y' + e^{ty}}$. Wie wir sehen werden, ist eine Lösung von (*) unter gewissen Voraussetzungen an F eindeutig bestimmt, wenn für ein t_0 die n Zahlen

$$y(t_0), y'(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0) \text{ gegeben (Anfangsbedingung, AB)}$$

sind.

Bemerkung: (*) ist nicht die allgemeinste Form der Differentialgleichung n -ter Ordnung: Die Gleichung könnte z. B. $y' + \sin y' = y$ lauten, das lässt sich nicht explizit nach y' auflösen. Da die Funktion $h : z \mapsto z + \sin z$ aber streng monoton wachsend ist und damit eine Umkehrfunktion g hat (mit geeignetem Definitionsbereich, z. B. auf \mathbb{R}), ist die Gleichung $h(y') = y$ äquivalent zu $y' = g(y)$, und dies hat die Form (*).

Einen Satz, der für beliebige Ausdrücke in mehreren Variablen die Auflösbarkeit nach einer der Variablen garantiert (unter gewissen Bedingungen), werden wir später kennenlernen (Satz über implizite Funktionen).

Setze

$$z_1 = y, z_2 = y', \dots, z_n = y^{(n-1)}$$

und betrachte das System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2 \\ z_2' &= z_3 \\ &\vdots \\ z_{n-1}' &= z_n \\ z_n' &= G(t, z_1, z_2, \dots, z_n) \end{aligned} \quad (**)$$

zusammen mit einer gegebenen (AB) $z_1(t_0), z_2(t_0), \dots, z_n(t_0)$.

5.1.1 Satz

Die Differentialgleichung n -ter Ordnung (*) ist äquivalent zu dem System (**) von n Gleichungen erster Ordnung, genauer:

- ▷ y ist eine Lösung von (*) $\Rightarrow z = (z_1, \dots, z_n)$ (wie oben definiert) löst (**).
- ▷ $z = (z_1, \dots, z_n)$ löst (**) $\Rightarrow y = z_1$ löst (*) und $z_2 = y', \dots, z_n = y^{(n-1)}$.

Dies gilt jeweils inklusive der Anfangsbedingungen.

Beweis: Scharf hinsehen! □

Bemerkung: Umgekehrt ist aber nicht jedes System 1. Ordnung mit n Gleichungen äquivalent zu einer Gleichung n -ter Ordnung.

Beispiel: Die Differentialgleichung $y'' + y = 0$ lässt sich in folgendes System übersetzen:

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2 \\ z_2' &= -z_1 \end{aligned}$$

5.2 Lösung von Differentialgleichungssystemen mittels Iteration

Bisher bestand unsere einzige Möglichkeit, die Lösbarkeit einer Differentialgleichung zu beweisen, darin, eine Lösung hinzuschreiben. Doch dies ist oft nicht möglich, selbst für so einfache Gleichungen wie $y'' = ty$! Diese Gleichung hat eine Lösung, nur gibt es für diese keine geschlossene Formel.

Wie kann man beweisen, dass eine Differentialgleichung eine Lösung besitzt, ohne die Lösung hinzuschreiben? Die Grundidee ist die der *Approximation*: Wie zeigt man, dass eine Funktion f mit gewissen Eigenschaften existiert, die also zum Beispiel eine gegebene Differentialgleichung löst? Man versucht, Funktionen f_n zu finden, die diese Eigenschaften nicht genau erfüllen, sondern ungefähr, immer besser für $n \rightarrow \infty$, und versucht dann zu zeigen, dass die Folge $(f_n)_n$ konvergiert, und dass der Grenzwert die gewünschten Eigenschaften hat. Hierbei werden uns die Begrifflichkeiten der metrischen Räume und vor allem der Banachsche Fixpunktsatz von großem Nutzen sein. Die »Punkte« der Räume, die uns hier interessieren, sind natürlich Funktionen!

Bei dieser Gelegenheit werden wir zum ersten Mal Bekanntschaft mit Methoden der »hohen Mathematik« machen. Im Unterschied zur »höheren Mathematik«, wo im Wesentlichen Grenzwerte von Zahlenfolgen eine Rolle spielen, geht es hier um Grenzwerte von Funktionenfolgen.

Bemerkung: Eine ähnliche Situation kennen wir bereits von Integralen: Jede stetige Funktion f hat eine Stammfunktion, jedoch gibt es für diese oft keine geschlossene Formel. Wir haben dies auch mittels Approximation bewiesen, indem wir f durch Treppenfunktionen t_n approximierten.

Zunächst präzisieren wir, wovon wir reden. Es ist nützlich (vor allem, um den Überblick zu behalten), eine kompakte Notation einzuführen.

5.2.1 Definition

Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung.

$$y' = F(t, y) \quad (*)$$

heißt **System von n Differentialgleichungen erster Ordnung**. Eine differenzierbare Kurve

$$y : I \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (I \subset \mathbb{R} \text{ Intervall})$$

heißt Lösung des Systems, falls für alle $t \in I$ gilt:

$$(t, y(t)) \in \Omega \quad \text{und} \quad y'(t) = F(t, y(t))$$

Das **Anfangswertproblem** für $(*)$ besteht darin, zu gegebenen $(t_0, y_0) \in \Omega$ eine Lösung mit

$$y(t_0) = y_0$$

zu finden. $(*)$ heißt **autonom**, falls F nicht von t abhängt.

$(*)$ ist tatsächlich ein System: Als Abbildung nach \mathbb{R}^n hat F Komponentenfunktionen, $F(t, y) = (F_1(t, y), \dots, F_n(t, y))$. Schreibt man noch $y = (y_1, \dots, y_n)$, so sagt $(*)$ gerade

$$\begin{aligned} y'_1 &= F_1(t, y_1, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y'_n &= F_n(t, y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

Zum Beispiel ist das System in Satz 5.1.1 durch die Abbildung $F(t, z_1, \dots, z_n) = (z_2, \dots, z_n, G(t, z_1, \dots, z_n))$ gegeben.

Bemerkung: Für ein autonomes System kann F als Abbildung $U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ (statt \mathbb{R}^{n+1}) aufgefasst werden, also als Vektorfeld. Die Lösungen der Gleichung sind dann die Integralkurven von F .

(Für die, die's formal etwas genauer mögen: $\triangleright F$ unabhängig von $t \triangleleft$ bedeutet, dass erstens $\Omega = \mathbb{R} \times U$ für eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist, und zweitens, dass ein $\tilde{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ existiert mit $F(t, y) = \tilde{F}(y)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, $y \in U$. Aus Faulheit, und um die Notation nicht zu überladen, schreibt man statt \tilde{F} oft einfach wieder F .)

5.2.2 Definition

Eine Abbildung $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **Lipschitz-stetig bzgl. y** , falls ein $L \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $\forall t, \forall y, z$ mit $(t, y) \in \Omega, (t, z) \in \Omega$ gilt:

$$\|F(t, y) - F(t, z)\| \leq L \|y - z\|$$

Wir verwenden hier und im Folgenden auf \mathbb{R}^n immer die euklidische Norm $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$. Man sieht leicht, dass aus der Lipschitz-Stetigkeit bzgl. y die Stetigkeit bzgl. y folgt. Beachten Sie, dass die Stetigkeit von F bezüglich aller Variablen in Definition 5.2.1 angenommen wurde.

Hier kommt die erste Version des Existenz- und Eindeigkeitssatzes:

5.2.3 Satz (Picard-Lindelöf, globale Version)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $F : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig und Lipschitz-stetig bzgl. y . Sei $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es genau eine Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems

$$y' = F(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \quad (*)$$

»Global« heißt: F ist Lipschitz-stetig bzgl. y auf dem ganzen Definitionsbereich $I \times \mathbb{R}^n$, und die Lösung existiert auf ganz I .

Beweisidee:

- ▷ Formuliere (*) als Fixpunktproblem.
- ▷ Versuche, den Fixpunktsatz anzuwenden.

Der erste Schritt wird durch folgendes Lemma erledigt.

5.2.4 Lemma

y ist Lösung von (*) $\Leftrightarrow y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist stetig, und $\forall t \in I : y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t F(s, y(s)) ds$.

Beweis: Wir benutzen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

» \Leftarrow «: Die Abbildung $t \mapsto \int_{t_0}^t F(s, y(s)) ds$ ist differenzierbar, weil $s \mapsto F(s, y(s))$ stetig ist. Also ist y differenzierbar, $y'(t) = 0 + F(t, y(t))$ für alle t und $y(t_0) = y_0 + \int_{t_0}^{t_0} F(s, y(s)) ds = y_0$.

» \Rightarrow «: $\int_{t_0}^t F(s, y(s)) ds = \int_{t_0}^t y'(s) ds = y(t) - y(t_0) = y(t) - y_0$. □

Bei genauem Hinsehen bemerkt man, dass wir in Lemma 5.2.4 folgende (eigentlich selbstverständliche) Definition benutzt haben.

5.2.5 Definition

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, b \in I$ und $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma = (x_1, \dots, x_n)$ stetig.

$$\int_a^b \gamma(s) ds := \left(\int_a^b x_1(s) ds, \dots, \int_a^b x_n(s) ds \right)$$

Im Folgenden brauchen wir eine kontinuierliche Version der Dreiecksungleichung:

5.2.6 Lemma

Mit I, a, b, γ wie oben gilt: $\left\| \int_a^b \gamma(s) ds \right\| \leq \int_a^b \|\gamma(s)\| ds$

Beweis: Idee: Approximiere γ durch Treppenfunktionen (mittels Approximation von jedem x_i durch Treppenfunktionen). Dann wird $\int_a^b \gamma(s) ds$ durch endliche Summen approximiert. Wendet man auf jede dieser Summen die Dreiecksungleichung an und geht zum Limes über, folgt die Behauptung. Siehe z.B. Königsberger, Analysis I, das Lemma nach Satz 2 in Kapitel 12.2, sowie Kapitel 11.3. □

Beweis (Satz von Picard-Lindelöf, globale Version): Wir nehmen zunächst an, dass I kompakt ist. Es sei

$$X := (C(I, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{\text{sup}}) \quad \text{mit} \quad C(I, \mathbb{R}^n) := \{y : I \rightarrow \mathbb{R}^n : y \text{ stetig}\}$$

mit der Norm $\|y\|_{\text{sup}} = \sup_{t \in I} \|y(t)\|$. Außerdem sei $T : X \rightarrow X$ die Abbildung mit $(Ty)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t F(s, y(s)) ds$. Um die Anzahl der Klammern zu reduzieren, schreiben wir Ty statt $T(y)$.

Nach Lemma 5.2.4 gilt:

$$\text{Lösen der Differentialgleichung (*)} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Finden eines } y \in X \text{ mit } Ty = y$$

1. Schritt: Verwende den Fixpunktsatz direkt! X ist vollständig. Dies ist eine Verallgemeinerung von Satz 1.3.11, die man genau wie diesen Satz beweist (hierbei wird wesentlich verwendet, dass \mathbb{R}^n vollständig ist).

Falls wir zeigen können, dass T eine Kontraktion ist, sind wir fertig. Wir müssen also zeigen, dass es ein $M \in \mathbb{R}$ mit $M < 1$ gibt, für das gilt:

$$\forall y, z \in X : \|Ty - Tz\|_{\text{sup}} \leq M \|y - z\|_{\text{sup}}$$

Was heißt das? Seien also $y, z \in X$, das heißt, es sind Abbildungen $y, z : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, und dann ist

$$\|Ty - Tz\|_{\text{sup}} = \sup_{t \in I} \|(Ty)(t) - (Tz)(t)\| \quad (\text{Norm in } \mathbb{R}^n) \text{ und}$$

$$(Ty)(t) - (Tz)(t) = (y_0 + \int_{t_0}^t F(s, y(s)) ds) - (y_0 + \int_{t_0}^t F(s, z(s)) ds) = \int_{t_0}^t [F(s, y(s)) - F(s, z(s))] ds,$$

also folgt mit Lemma 5.2.6

$$\begin{aligned} \|(Ty)(t) - (Tz)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t [F(s, y(s)) - F(s, z(s))] ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \underbrace{\|F(s, y(s)) - F(s, z(s))\|}_{\leq L \cdot \|y(s) - z(s)\| \leq L \cdot \|y - z\|_{\text{sup}}} ds \leq |t - t_0| \cdot L \cdot \|y - z\|_{\text{sup}} \end{aligned}$$

Daraus folgt nun

$$\|Ty - Tz\|_{\text{sup}} \leq \sup_{t \in I} |t - t_0| L \cdot \|y - z\|_{\text{sup}} \leq \underbrace{(\text{Länge von } I) \cdot L}_{=: M} \|y - z\|_{\text{sup}}$$

Notation: Statt Länge des Intervalls I schreiben wir kurz: $|I|$. Der Fixpunktsatz ist anwendbar, falls $M = |I|L < 1$ ist.

Also: Falls $|I| < \frac{1}{L}$, dann sind wir fertig.

2. Schritt: Wie zeigt man den Satz, falls $|I| \geq \frac{1}{L}$ ist?

Am einfachsten so: Sei $I = [a, b]$. Um die Lösung rechts von t_0 , also in $[t_0, b]$, zu konstruieren, wähle $(t_0 <) t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_N = b$ so, dass für alle $i = 1, \dots, N$ gilt: $t_i - t_{i-1} < \frac{1}{L}$. Wir erhalten nun y auf $[t_0, b]$ wie folgt:

1. Wir lösen $y' = F(t, y)$ auf $[t_0, t_1]$ mit der AB $y(t_0) = y_0$ (nach dem gerade Bewiesenen) und erhalten $y_{01} := y(t_1)$.
2. Wir lösen $y' = F(t, y)$ auf $[t_1, t_2]$ mit der AB $y(t_1) = y_{01}$ und erhalten $y_{02} := y(t_2)$.
3. Wir fahren so fort, bis wir bei $t_N = b$ ankommen.

y ist an den Stellen t_i differenzierbar, da es links- und rechtsseitig differenzierbar ist und beide Ableitungen gleich $F(t_i, y_{0i})$ sind. Daher ist es eine Lösung der Differentialgleichung auf $[t_0, b]$.

Analog konstruiert man die Lösung links von t_0 .

Mit diesem Verfahren folgt auch die Eindeutigkeit der Lösung auf ganz I , da nach dem Fixpunktsatz die Lösung zunächst auf $[t_0, t_1]$ eindeutig bestimmt ist, dann der Wert bei t_1 wiederum mittels des Fixpunktsatzes die Lösung auf $[t_1, t_2]$ eindeutig bestimmt etc.

3. Schritt: Es bleibt noch der Fall eines nicht-kompakten Intervalls I zu untersuchen. Dies geht mit folgendem Standardtrick (Ausschöpfung durch kompakte Teilmengen): Wir wählen kompakte Intervalle $I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I$ mit $I = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ und $t_0 \in I_1$ (z.B. $I_k = [-k, k]$ für $I = \mathbb{R}$ und $t_0 = 0$) und wenden das schon Bewiesene auf jedes I_k an. Wir erhalten Lösungen y_k , definiert auf I_k , für $k = 1, 2, \dots$. Für $t \in I$ setzen wir nun $y(t) = y_k(t)$, wobei k so gewählt ist, dass $t \in I_k$. Obwohl man für k hier viele Möglichkeiten hat, ist dies konsistent definiert, denn für $k < k'$ ist $I_k \subset I_{k'}$ und daher müssen $y_k, y_{k'}$ auf I_k übereinstimmen, wegen der Eindeutigkeit auf I_k . Die Eindeutigkeit auf I folgt genauso. \square

Verfahren: Der Beweis des Satzes liefert auch ein Verfahren, wie man die Lösung »findet«, d.h. mit beliebiger Genauigkeit berechnen kann, zumindest unter der Bedingung $|I| < \frac{1}{L}$:

1. Wähle $y_1 \in X$ beliebig.
2. Berechne $y_2 = Ty_1$.
3. Berechne $y_3 = Ty_2$.
- ⋮

Für $n \rightarrow \infty$ konvergiert dann die Folge der y_n gleichmäßig gegen y ! Dies folgt aus dem ersten Teil des Beweises und dem Fixpunktsatz.

Bemerkung: Hier sind zwei alternative Zugänge zum Fall $|I| \geq \frac{1}{L}$:

- (1) Man zeigt durch wiederholtes Abschätzen der Integrale (Übung!), dass für $N \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\forall y, z \in X : \|T^N y - T^N z\|_{\text{sup}} \leq \frac{(|I|L)^N}{N!} \|y - z\|_{\text{sup}}$$

wobei T^N die N -te Verkettung von T bezeichnet, also $T^2 = T \circ T$, $T^3 = T \circ T \circ T$ etc. Aus $\frac{C^N}{N!} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ für alle C folgt, dass T^N für genügend große N eine Kontraktion ist. Damit folgt die Behauptung aus der Erweiterung des Fixpunktsatzes, die besagt, dass letzteres schon als Bedingung an T genügt (Übung).

Dieser Beweis funktioniert nur für endliche Intervalle.

- (2) (Ein sehr hübscher Trick.) Statt der Supremumsnorm auf $C(I, \mathbb{R}^n)$ verwendet man eine sogenannte **gewichtete Supremumsnorm**. Das heißt, für eine (später zu wählende) Funktion $h : I \rightarrow (0, \infty)$ definiert man $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$\|y\|_h := \sup_{t \in I} h(t) \|y(t)\|$$

Man sieht dann leicht (analog zur üblichen Supremumsnorm), dass dies eine Norm auf dem Raum $X_h := \{y : I \rightarrow \mathbb{R}^n : y \text{ ist stetig und } \|y\|_h < \infty\}$

ist. Die Vollständigkeit von X_h zeigt man ähnlich wie bei Satz 1.3.11. Analog zur Rechnung im gegebenen Beweis, aber nun mittels $h(s) \|y(s) - z(s)\| \leq \|y - z\|_h$, also $\|y(s) - z(s)\| \leq \frac{\|y - z\|_h}{h(s)}$, erhält man:

$$\|Ty - Tz\|_h \leq \|y - z\|_h L \sup_{t \in I} h(t) \left| \int_{t_0}^t \frac{1}{h(s)} ds \right|$$

Das Erstaunliche ist nun, dass man die Gewichtsfunktion h so wählen kann, dass

$$L \sup_{t \in I} h(t) \left| \int_{t_0}^t \frac{1}{h(s)} ds \right| < 1$$

ist. Man kann zum Beispiel $h(t) = e^{-2L|t-t_0|}$ wählen.

Dieser Beweis gibt zusätzliche Informationen (falls I unbeschränkt ist): Zum einen konvergiert die Iterationsmethode gleichmäßig auf ganz I (allerdings nicht bezüglich der Supremumsnorm, sondern bezüglich der Norm $\|\cdot\|_h$, diese Aussage ist schwächer, da $h(t) \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0$); außerdem wächst die Lösung y für $|t| \rightarrow \infty$ höchstens wie $Ce^{2L|t|}$, da sie ja in X_h liegt – dieses ließe sich noch leicht zu $C_\varepsilon e^{(L+\varepsilon)|t|}$, $\varepsilon > 0$ beliebig, verbessern.

Eine Feinheit: Damit überhaupt $T : X_h \rightarrow X_h$ gilt, braucht man eine Bedingung an F (als Ersatz für die Kompaktheit von I). Zum Beispiel reicht (für das angegebene h) folgende Bedingung aus: $t \mapsto F(t, y_0)$ ist beschränkt auf I .

Frage: Was bedeutet die Lipschitz-Bedingung? Wie prüft man sie nach? Ist sie in den wichtigsten Beispielen erfüllt?

Nachprüfen lässt sich die Lipschitz-Bedingung meist am einfachsten mit dem folgenden Lemma.

5.2.7 Lemma

Sei $n = 1$. Sei $F(t, y)$ differenzierbar in y für jedes t . Sei $L \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$F \text{ ist Lipschitz-stetig bzgl. } y \text{ mit Lipschitz-Konstante } L \iff \forall t, y : \left| \frac{\partial F}{\partial y}(t, y) \right| \leq L$$

Hierbei bedeutet $\frac{\partial F}{\partial y}$ die Ableitung von F , bei festem t als Funktion von y betrachtet. Man nennt dies auch »partielle Ableitung« von F nach y . Für $n > 1$ werden wir in Lemma 7.2.5 eine ähnliche Bedingung kennenlernen.

Beweis: Dies ist gerade Satz 1.3.7. □

Betrachten wir nun einige unserer einfachsten Beispiele von Differentialgleichungen.

Beispiele: Sei $n = 1$.

(1) $y' = y$

Also $F(t, y) = y$ und $\frac{\partial F}{\partial y} = 1$, somit Lipschitz-stetig bezüglich y für $t \in \mathbb{R}$.

Lösung: $y(t) = Ce^t$ (definiert für alle $t \in \mathbb{R}$, wie nach Satz 5.2.3 zu erwarten).

(2) $y' = y^2$

Also $F(t, y) = y^2$ und $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$, somit nicht Lipschitz-stetig, da unbeschränkt für $y \in \mathbb{R}$ (egal auf welchem t -Intervall)!

Lösung: $y(t) = \frac{1}{c-t}$ (existiert nicht für alle t !).

(3) $y' = \sqrt{y}$ ($y \geq 0$)

Also $F(t, y) = \sqrt{y}$ und $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \xrightarrow{y \rightarrow 0} \infty$, somit nicht Lipschitz-stetig!

Lösungen: $y \equiv 0$ und $y_c = \begin{cases} \frac{1}{4}(t-c)^2 & \text{für } t \geq c \\ 0 & \text{für } t \leq c \end{cases}$ (für alle $c \in \mathbb{R}$).

Nicht eindeutig: Das AWP $y(0) = 0$ hat die Lösungen $y \equiv 0$ und y_c , $c \geq 0$.

Fazit: Die Lipschitz-Bedingung ist für wichtige Beispiele nicht erfüllt, und die Aussage des globalen Satzes von Picard-Lindelöf trifft nicht auf diese Beispiele zu.

Wir befassen uns nun eingehend mit dem Phänomen des Beispiels $y' = y^2$. Das ist zwar nicht Lipschitz-stetig für $y \in \mathbb{R}$, aber für beschränkte y schon. Das führt auf eine wichtige neue Idee:

Die Idee der Lokalität: Oft sind wichtige Eigenschaften von Gleichungen, Funktionen etc. nur »lokal«, d. h. in geeigneten Umgebungen beliebiger Punkte, erfüllt. Das führt dann zu lokalen Schlussfolgerungen.

In einem zweiten Schritt (oft mit Hilfe von Kompaktheitsargumenten) kann man manchmal aus den lokalen Ergebnissen auf globale schließen.

5.2.8 Definition

Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(t, y) \mapsto F(t, y)$ stetig.

F heißt **lokal Lipschitz-stetig bzgl. y** , falls es zu jedem $p \in \Omega$ eine Umgebung U gibt, so dass $F|_{U \cap \Omega}$ Lipschitz-stetig bzgl. y ist.

Hierbei heißt $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ **Umgebung** von p , wenn ein $r > 0$ mit $K_r(p) \subset U$ existiert.

Diese Bedingung ist »meist« erfüllt:

5.2.9 Lemma

Sei $n = 1$ und Ω offen. Angenommen, $\frac{\partial F}{\partial y}$ existiert auf Ω und ist dort stetig. Dann ist F lokal Lipschitz-stetig bezüglich y .

Eine analoge Aussage gilt für $n > 1$ (wenn wir erst einmal Ableitungen in höheren Dimensionen definiert haben ...)

Beweis: Zu $p \in \Omega$ wähle $r > 0$ mit $K_r(p) \subset \Omega$. Sei K die abgeschlossene Kugel um p vom Radius $\frac{r}{2}$. Dann ist K kompakt und in Ω enthalten. Also hat $\frac{\partial F}{\partial y}$ auf K ein Maximum L , und nach Satz 1.3.7 ist F auf K Lipschitz-stetig (mit Lipschitz-Konstante L). \square

Beispiel: $F(y) = y^2$ (auf $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) und $F(y) = \sqrt{y}$ (auf $\Omega = \mathbb{R} \times (0, \infty)$) sind lokal Lipschitz-stetig bezüglich y .

5.2.10 Satz (Picard-Lindelöf, lokale Version)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl. y . Dann gibt es zu jedem $(t_0, y_0) \in \Omega$ ein $\delta > 0$, so dass das AWP

$$y' = F(t, y) \quad y(t_0) = y_0$$

eine eindeutige auf $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ definierte Lösung hat.

Beweis: Sei nun also $(t_0, y_0) \in \Omega$, $r > 0$ und $L > 0$, so dass $K_r(t_0, y_0) \subset \Omega$ und F auf $K_r(t_0, y_0)$ Lipschitz-stetig bzgl. y mit der Lipschitz-Konstanten L ist. Wählt man ein $\rho > 0$ mit $Q := [t_0 - \rho, t_0 + \rho] \times \overline{K_\rho(y_0)} \subset K_r(t_0, y_0)$ – dies ist nach Pythagoras sicherlich für $\sqrt{\rho^2 + \rho^2} = \sqrt{2}\rho < r$ erfüllt –, so gilt für alle $t \in [t_0 - \rho, t_0 + \rho]$ und alle $y \in \overline{K_\rho(y_0)}$:

$$\|F(t, y) - F(t, z)\| \leq L\|y - z\|$$

Sei $M := \max_{(t, y) \in Q} |F(t, y)|$. Das Maximum existiert, da Q kompakt und F stetig ist.

Wähle nun $\delta > 0$ mit $\delta \leq \rho$, $\delta \leq \frac{\rho}{M}$ und $\delta < \frac{1}{L}$. Die erste Bedingung stellt sicher, dass $F(t, y)$ für $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ definiert ist, die zweite, dass (siehe unten) T den Raum X in sich abbildet und die dritte, dass T eine Kontraktion ist.

Wir verfahren nun ähnlich wie im Beweis des globalen Satzes von Picard-Lindelöf: Sei

$$X := \{y : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n : y \text{ stetig, } y(t) \in \overline{K_\rho(y_0)} \text{ für alle } t\},$$

versehen mit der Supremums-Norm. Die Einschränkung an die Werte von y brauchen wir, da wir nur für diese Werte eine Information über $F(t, y(t))$ haben.

X ist vollständig. Dies zeigt man wieder wie in Satz 1.3.11. Wesentlich hierbei ist, dass $\overline{K_\rho(y_0)}$ abgeschlossen und damit vollständig ist. Wir wollen nun wieder

$$T : X \rightarrow X, \quad (Ty)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t F(s, y(s)) ds$$

betrachten. Finden wir einen Fixpunkt von T , sind wir fertig.

Doch halt: Zunächst ist zu klären, warum T überhaupt den Raum X in sich abbildet, d. h. warum aus $y \in X$ auch $Ty \in X$, also $(Ty)(t) \in \overline{K_\rho(y_0)}$ für alle $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ folgt! Dies sieht man so:

$$\|(Ty)(t) - y_0\| = \left\| \int_{t_0}^t F(s, y(s)) ds \right\| \leq \int_{t_0}^t \|F(s, y(s))\| ds \leq |t - t_0| M \leq \delta M \leq \rho$$

weil wir $\delta \leq \frac{\rho}{M}$ gewählt hatten. Schließlich rechnet man wie im Beweis des globalen Satzes von Picard-Lindelöf, dass

$$\|Ty - Tz\|_{\text{sup}} \leq \|y - z\|_{\text{sup}} \sup_{t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]} |t - t_0| L \leq \|y - z\|_{\text{sup}} \delta L,$$

und wegen $\delta L < 1$ ist T eine Kontraktion. Also ist der Fixpunktsatz anwendbar und gibt die Behauptung. \square

Natürlich ist es etwas unbefriedigend, dass die Lösung nur lokal existiert. Im Allgemeinen kann man nicht viel über das δ in Satz 5.2.10 sagen. Man kann das Definitionsintervall aber »so groß wie möglich« machen. Was heißt das genau?

5.2.11 Definition

$y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **maximale Lösung** von $y' = F(t, y)$, falls gilt:

Wenn $J \supset I$ und $z : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lösung ist mit $z|_I = y$, dann folgt $J = I$.

Mit anderen Worten: Der Definitionsbereich einer maximalen Lösung kann nicht vergrößert werden, wenn sie weiter Lösung bleiben soll.

5.2.12 Satz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl. y .

Dann gibt es durch jedes $(t_0, y_0) \in \Omega$ genau eine maximale Lösung von $y' = F(t, y)$.

Ihr Definitionsbereich ist ein offenes Intervall.

Zum Beweis brauchen wir eine etwas stärkere Form der Eindeutigkeit als im lokalen Satz von Picard-Lindelöf gegeben:

5.2.13 Lemma (Globale Eindeutigkeit)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl. y . Sind y, \tilde{y} zwei auf einem Intervall I definierte Lösungen von $y' = F(t, y)$ und gilt $y(t_0) = \tilde{y}(t_0)$ für ein $t_0 \in I$, so folgt $y \equiv \tilde{y}$ auf I .

Beweis: Sei $t_1 = \sup\{t \in I : y(t) = \tilde{y}(t)\}$. Wir zeigen zunächst, dass t_1 entweder der rechte Randpunkt von I ist oder nicht in I liegt. Das analoge Argument mit den Werten links von t_0 ergibt dann die Behauptung.

Angenommen, $t_1 \in I$, aber t_1 ist nicht der rechte Randpunkt von I . Dann folgt aus der Stetigkeit von y, \tilde{y} , dass $y(t_1) = \tilde{y}(t_1)$, und dann aus Satz 5.2.10, dass ein $\delta > 0$ existiert mit $[t_1 - \delta, t_1 + \delta] \subset I$ und $y(t) = \tilde{y}(t)$ auf $[t_1 - \delta, t_1 + \delta]$. Dies steht im Widerspruch zur Definition von t_1 . \square

Beweis (von Satz 5.2.12): Sei $I = \bigcup \{I' : I' \text{ offenes Intervall und es gibt eine Lösung } y_{I'} \text{ auf } I'\}$. Diese Notation ist gerechtfertigt, da es nach Lemma 5.2.13 auf jedem Intervall I' , das t_0 enthält, höchstens eine Lösung durch (t_0, y_0) gibt. Für $t \in I$ setze $y(t) = y_{I'}(t)$, wobei I' so gewählt ist, dass $t \in I'$.

Wir müssen zunächst zeigen, dass dies eine konsistente Definition ist (man sagt auch, dass y »wohldefiniert« ist), das heißt: Falls $t \in I'$ und $t \in I''$, so $y_{I'}(t) = y_{I''}(t)$.

Beweis hiervon: $t_0 \in I'$ und $t_0 \in I''$, somit $[t_0, t] \subset I' \cap I''$, da beides Intervalle sind. Aus der Eindeutigkeit auf $[t_0, t]$ (Lemma 5.2.13) folgt dann $y_{I'}(t) = y_{I''}(t)$.

Also ist $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ wohldefiniert. y ist eine Lösung, da jedes $y_{I'}$ eine Lösung ist. I ist als Vereinigung offener Mengen offen.

y ist eindeutig, da jede maximale Lösung unter den $y_{I'}$ vorkommen muss, also durch y fortgesetzt wird, also wegen der Maximalität gleich y sein muss. \square

Zusammenfassung

Der globale Satz von Picard-Lindelöf liefert die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung eines Anfangswertproblems

$$y' = F(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

unter der Annahme, dass F (global) Lipschitz-stetig bzgl. y und für alle $y \in \mathbb{R}^n$ definiert ist.

Diese Bedingung ist in Einzelfällen erfüllt, jedoch für viele interessante Gleichung ist sie nicht erfüllt. Der lokale Satz von Picard-Lindelöf liefert Existenz und Eindeutigkeit unter der wesentlich schwächeren Bedingung, dass F nur *lokal* Lipschitz-stetig bzgl. y ist. Hierfür genügt es schon, dass F bzgl. y stetig differenzierbar ist. Diese Bedingung ist für die meisten Differentialgleichungen von Interesse erfüllt.

Der Preis für diese größere Allgemeinheit ist, dass die Lösungen im Allgemeinen nur *lokal* existieren, d. h. nicht auf demselben Intervall von t -Werten, für die F definiert ist (dies kennen wir schon vom Beispiel $y' = y^2$).

Der globale Satz lässt sich durch Umformulierung der Differentialgleichung in ein Fixpunktproblem mittels des Fixpunktsatzes beweisen. Der lokale Satz ebenfalls, aber die technischen Details sind dabei etwas komplizierter.

5.3 Stetige Abhängigkeit von Anfangswerten und Parametern

Für die Anwendungen (und auch innerhalb der Mathematik) ist es wichtig, zu wissen, wie sich die Lösung einer Differentialgleichung ändert, wenn man den Anfangswert oder die Gleichung selbst kontinuierlich ändert.

Beispiel (Abhängigkeit vom Anfangswert): Wir betrachten das Anfangswertproblem $y' = y$, $y(0) = y_0$ für ein $y_0 \in \mathbb{R}$. Die Lösung kennen wir bereits: $y(t) = y_0 e^t$.

Die Abhängigkeit der Lösung vom Anfangswert y_0 : Sei $\tilde{y} = \tilde{y}_0 e^t$. Dann $\tilde{y}(t) - y(t) = (\tilde{y}_0 - y_0) e^t$.

Für große Zeiten laufen zwar die Lösungen weit auseinander, aber auf jedem beschränkten Zeitintervall gilt $\tilde{y} \rightarrow y$ (gleichmäßig) für $\tilde{y}_0 \rightarrow y_0$.

Beispiel (Abhängigkeit von Parametern): Wir betrachten das Anfangswertproblem $y' = ay$, $y(0) = 1$ für ein $a \in \mathbb{R}$. Die Lösung ist bereits bekannt: $y(t) = e^{at}$.

Die Abhängigkeit der Lösung vom Parameter a : Wieder laufen die Lösungen für verschiedene Werte von a auseinander, wenn $t \rightarrow \infty$ oder $t \rightarrow -\infty$, hängen aber wie im vorigen Beispiel für beschränkte t in gleichmäßiger Weise stetig von a ab.

Bemerkung: Das Verhalten von Lösungen von Differentialgleichungen für $t \rightarrow \infty$ und die Abhängigkeit dieses Verhaltens von den Anfangswerten wird in der Theorie der **dynamischen Systeme** untersucht.

Von jetzt an betrachten wir nur **autonome Systeme**. Da diese als Vektorfelder verstanden werden können, schreiben wir $V(y)$ statt $F(y)$.

Dies ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, denn ähnlich zu Satz 2.2.3 kann man leicht zeigen, dass jedes nicht-autonome System in n Dimensionen äquivalent ist zu einem autonomen System in $n + 1$

Dimensionen. (Allerdings ist diese Reduktion nicht immer sinnvoll, zum Beispiel bei linearen Systemen mit variablen Koeffizienten. Diese sollte man nicht als autonome Systeme in einer Dimension mehr betrachten, da sie dort nicht-linear sind – ein Verlust an Information.)

Im folgenden sei stets $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $V : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig. Wir erinnern uns, dass Integralkurven von V gerade Lösungen von $y' = V(y)$ sind.

Eine grundlegende Eigenschaft autonomer Systeme ist:

5.3.1 Lemma (Zeitverschiebung)

Sei $y : I \rightarrow U$ eine maximale Integralkurve des Vektorfeldes $V : U \rightarrow \mathbb{R}^n$.

- (1) Für jedes $c \in \mathbb{R}^n$ ist $y_c(t) := y(t - c)$, definiert auf $\{t : t - c \in I\}$, auch maximale Integralkurve.
- (2) Ist $z : J \rightarrow U$ eine weitere maximale Integralkurve und gibt es $r, s \in \mathbb{R}$ mit $y(r) = z(s)$, so folgt $z = y_{s-r}$, also $\forall t : z(t) = y(t - s + r)$ und $J = \{t : t - s + r \in I\}$.

Die Orbits von y, z in (2) sind gleich, nur der »Fahrplan« ist um $s - r$ verschoben.

Konsequenz: Kennt man für ein autonomes System die Lösungen mit bei $t_0 = 0$ gegebenem Anfangswert, so kennt man auch die Lösungen für beliebiges t_0 . Daher werden wir meist nur $t_0 = 0$ betrachten.

Beweis:

- (1) Eine kleine Rechnung:

$$y'(t) = F(y(t)) \implies y'_c(t) = \frac{d}{dt}(y(t - c)) = 1 \cdot y'(t - c) = F(y(t - c)) = F(y_c(t))$$

- (2) Die maximalen Lösungen z und y_{s-r} haben bei $t = s$ denselben Wert $z(s) = y(s - (s - r)) = y(r)$, sind also gleich. \square

Bemerkung: (1) oder (2) im Lemma gilt \Leftrightarrow Das DGL-System ist autonom.

Um die Abhängigkeit der Lösungen von Anfangswerten und Parametern zu untersuchen, brauchen wir eine parameterabhängige Version des Banachschen Fixpunktsatzes.

Frage: Sei X vollständiger metrischer Raum und $T : X \rightarrow X$ eine Kontraktion. Wie ändert sich der Fixpunkt von T , wenn man T ändert?

Zunächst: Wie beschreibt man mathematisch eine Änderung von T ? \rightsquigarrow Durch Einführen eines »Parameterraumes« Y .

5.3.2 Satz (Fixpunktsatz mit Parametern)

Seien X, Y metrische Räume und X vollständig. Zudem sei $T : X \times Y \rightarrow X$, und zu $y \in Y$ schreibe $T_y : X \rightarrow X$ mit $T_y(x) = T(x, y)$.

Angenommen es gilt:

- (1) Es existiert ein $L < 1$, so dass $\forall_{y \in Y} \forall_{x, x' \in X} : d_X(T_y x, T_y x') \leq L d_X(x, x')$.
- (2) Für jedes $x \in X$ ist $T(x, \cdot) : Y \rightarrow X$ stetig.

Für jedes $y \in Y$ sei p_y der eindeutige Fixpunkt von T_y .

Dann ist die Abbildung $Y \rightarrow X, y \mapsto p_y$ stetig.

Bedingung (1) sagt, dass jedes T_y eine Kontraktion ist, gleichmäßig bezüglich y ; das heißt: die Kontraktionskonstante kann unabhängig von y gewählt werden.

Bedingung (2) ist eine (recht schwache) Art, auszudrücken, dass T_y stetig von y abhängt.

Beweis: Es seien $y, z \in Y$, $p := p_y$, $q := p_z$, also $p = T_y p$ und $q = T_z q$. Dann folgt

$$d(p, q) = d(T_y p, T_z q) \leq d(T_y p, T_z p) + d(T_z p, T_z q) \leq d(T_y p, T_z p) + L d(p, q)$$

und daher

$$d(p, q) - L \cdot d(p, q) \leq d(T_y p, T_z p) \xrightarrow{L < 1} d(p, q) \leq \frac{1}{1-L} d(T_y p, T_z p)$$

Sind nun $z_n \rightarrow y$ in Y , so folgt (mit $p = p_y$) wegen Bedingung (2):

$$d(p_y, p_{z_n}) \leq \frac{1}{1-L} d(T_y p, T_{z_n} p) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

also $p_{z_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p_y$. □

Wir erinnern an die Annahmen für das Folgende:

$$U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}$$

$$V : U \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ lokal Lipschitz-stetig}$$

(Zur Erinnerung: Dann hat $y' = V(y)$ eine lokale Lösung für jedes gegebene $y(0) = y_0$, wobei mit *lokal* gemeint ist, dass y auf einem Intervall $(-\delta, \delta)$ für ein $\delta > 0$ definiert ist.)

5.3.3 Definition (Fluss eines Vektorfeldes)

Zu $y_0 \in U$ sei $\gamma_{y_0} : I_{y_0} \rightarrow \mathbb{R}^n$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems $y' = V(y)$, $y(0) = y_0$. Der **Fluss von V** ist die Abbildung

$$\Phi(t, y_0) := \gamma_{y_0}(t), \text{ definiert auf } \Omega = \{(t, y_0) : t \in I_{y_0}, y_0 \in U\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

also $\Phi : \Omega \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$.

Im (häufigen) Idealfall, wo alle Lösungen für alle Zeiten definiert sind, ist also $\Phi : \mathbb{R} \times U \rightarrow U$.

Ist V das Geschwindigkeitsfeld einer stationären Strömung, so beschreibt Φ wirklich das Fließverhalten der Strömung: Ist etwa $K \subset U$ ein Farbtropfen, den man zur Zeit $t = 0$ ins Wasser fallen lässt, so zeigt $\Phi(t, K) := \{\Phi(t, y) : y \in K\}$ die Form des Tropfens nach der Zeit t an.

5.3.4 Satz (über die stetige Abhängigkeit von Anfangswerten)

Mit Ω und Φ wie oben gilt:

- (1) Die Menge Ω ist offen.
- (2) Die Abbildung Φ ist stetig.

Beweis: 1. Schritt: Behauptung: Sei $p \in U$. Dann gibt es $\delta > 0$ und $r > 0$, so dass für jedes $y_0 \in K_r(p)$ die Lösung γ_{y_0} auf dem Zeitintervall $(-\delta, \delta)$ existiert, und $\Phi : (-\delta, \delta) \times K_r(p) \rightarrow U$ ist stetig.

Beweis: Wir erinnern uns daran, welche Form $y(t)$ hat, wenn es Lösung mit Anfangswert y_0 ist: Man konnte y als Fixpunkt einer Kontraktion T darstellen:

$$y(t) = y_0 + \int_0^t V(y(s)) ds =: (T(y, y_0))(t)$$

Statt wie vorher $(Ty)(t)$ zu schreiben und y_0 zu fixieren, wollen wir nun y_0 als Parameter von T auffassen. Wir schreiben also $(T(y, y_0))(t)$ oder $(T_{y_0}y)(t)$. Wir wollen den Fixpunktsatz mit Parameter auf T

anwenden. Dazu müssen wir zunächst geeignete Räume X und Y finden, so dass erstens T den Raum $X \times Y$ nach X abbildet und zweitens eine Kontraktion bzgl. des ersten und stetig bzgl. des zweiten Arguments ist, wie im Satz oben.

Wie findet man geeignete X, Y ? Y sollte eine Menge von Anfangsbedingungen y_0 nahe p sein. X sollte eine Menge von Funktionen $y : (-\delta, \delta) \rightarrow U$ sein. Wenn t genügend klein ist, wird – mittels einer Schranke an $\|V\|$ – auch $(T_{y_0}y)(t)$ nahe an y_0 liegen. Wichtig hierbei ist, dass $(T_{y_0}y)(t)$ dabei die Menge U nicht verlässt. Schließlich brauchen wir für die Vollständigkeit von X noch, dass es durch eine Einschränkung der Art $y(t) \in K \forall t$ definiert ist, mit K abgeschlossen. Diese Überlegungen führen z. B. zu folgendem Beweis.

Da U offen ist, gibt es ein $r > 0$ mit $K_{4r}(p) \subset U$. Da V lokal Lipschitz-stetig ist, können wir r sogar so wählen, dass V auf $K_{4r}(p)$ Lipschitz-stetig ist. Sei L die Lipschitz-Konstante. Da $\|V\|$ eine stetige Funktion auf der kompakten Menge $\overline{K_{2r}(p)}$ ist, gibt es ein $M > 0$ mit $\|V(y)\| \leq M$ für alle $y \in \overline{K_{2r}(p)}$. Wähle nun $\delta > 0$ mit $\delta M < r$ und $\delta L < 1$. Setze

$$X = C((-\delta, \delta), \overline{K_{2r}(p)})$$

$$Y = K_r(p)$$

wobei X mit der Supremumsnorm versehen ist. Dann ist $T : X \times Y \rightarrow X$, da für $y \in X, y_0 \in Y$ sicherlich $T(y, y_0)$ stetig ist sowie für $t \in (-\delta, \delta)$ gilt

$$\|(T(y, y_0))(t) - p\| \leq \|(T(y, y_0))(t) - y_0\| + \|y_0 - p\| < \left\| \int_0^t V(y(s)) ds \right\| + r \leq \delta M + r < 2r$$

Weiterhin ist Bedingung (2) von Satz 5.3.2 offensichtlich erfüllt, und Bedingung (1) gilt mit L ersetzt durch $\delta L < 1$, denn dieselbe Rechnung wie im Beweis von Picard-Lindelöf ergibt für $y, z \in X, y_0 \in Y$

$$\|T(y, y_0) - T(z, y_0)\|_{\text{sup}} \leq \delta L \|y - z\|_{\text{sup}}$$

(y_0 kürzt sich heraus!). Schließlich ist X vollständig.

Der Fixpunktsatz mit Parameter ist also anwendbar und sagt, dass es zu jedem $y_0 \in Y$ eine auf $(-\delta, \delta)$ definierte Lösung γ_{y_0} mit Anfangswert y_0 gibt, und dass die Abbildung $Y \rightarrow X, y_0 \mapsto \gamma_{y_0}$ stetig ist.

Übung: Zeigen Sie, dass die letzte Aussage die Stetigkeit der Abbildung $\Phi : (t, y_0) \mapsto \gamma_{y_0}(t), (-\delta, \delta) \times Y \rightarrow U$ impliziert.

Damit ist die Behauptung des ersten Schritts bewiesen.

2. Schritt: Zeige, dass die Behauptung des Satzes aus dem ersten Schritt folgt. Übung! □

Bemerkung: Falls V außer von y noch von Parametern stetig abhängt, so ist auch Φ stetig bezüglich dieser Parametern. Um dies zu zeigen, muss man den Beweis oben nur leicht modifizieren: Im Wesentlichen ersetzt man den Raum Y durch einen Raum $Y \times Y'$, wobei Y' der Raum der zusätzlichen Parameter ist.

Ein Beispiel findet man in der uns bekannten Gleichung $y' = a \cdot y$, deren Lösung $y(t) = c \cdot e^{a \cdot t}$ ist. Offensichtlich ist y auch stetig bezüglich a . Genauer gesagt ist y stetig in (c, a, t) .

Eine wesentliche Erweiterung dieser Aussagen besteht darin, dass Φ sogar differenzierbar ist und auch differenzierbar von Parametern abhängt, wenn V dies tut. Dies ist etwas schwieriger zu zeigen (siehe z. B. Königsberger, Analysis 2, Kapitel 4.6). Den Begriff der Differenzierbarkeit für eine Abbildung, die von mehreren Variablen abhängt, werden wir auch erst später in dieser Vorlesung kennenlernen.

5.4 Integralkurven und Orbits von Vektorfeldern

In diesem Teil betrachten wir einige Eigenschaften von Integralkurven von Vektorfeldern und deren Orbits. In den allermeisten Fällen kann man ein System $y' = V(y)$ nicht explizit lösen. Trotzdem möchte man gerne Informationen über die Lösungen bekommen (über deren Existenz und Eindeutigkeit hinaus), zum

Beispiel ob sie beschränkt oder unbeschränkt sind, ob sie für alle Zeiten existieren, ob sie periodisch sind. Manchmal kann man zwar nicht die Lösungen (also Integralkurven), wohl aber deren Orbits bestimmen, also die Menge $\{y(t) : t \in I\}$: Das heißt, wo y sich entlangbewegt, aber man kennt den Zeitplan nicht.

Im Folgenden sei U eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n und $V : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig. Wir betrachten also autonome Systeme.

5.4.1 Definition

Ein **Orbit des Vektorfelds** V ist der Orbit einer maximalen Integralkurve von V .

Das **Phasenportrait von** V ist die Menge der Orbits von V (oder auch nur eine Skizze davon).

5.4.2 Satz

Sei V ein lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Dann bilden die Orbits von V eine Zerlegung von U . Das heißt:

- (1) Die Vereinigung aller Orbits ist U .
- (2) Je zwei verschiedene Orbits sind disjunkt.

Beweis: Im Grunde handelt es sich hierbei nur um eine Umformulierung des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes:

(1) Zu jedem $y_0 \in U$ gibt es eine Integralkurve, deren Orbit y_0 enthält (Existenz von Lösungen).

(2) Zwei Orbits, die sich schneiden, sind schon gleich (Eindeutigkeit), denn:

Seien y, z zwei Lösungen, deren Orbits sich schneiden. Das heißt, dass $r, s \in \mathbb{R}$ existieren, so dass $y(r) = z(s)$. Nach dem Lemma zur Zeitverschiebung folgt für alle t : $z(t) = y(t - s + r)$. Da es sich hier nur um eine Reparametrisierung handelt, sind die Orbits von y und z gleich. \square

Beispiel: Die Orbits der Lösungen des Gleichungssystems

$$x' = -y \quad y' = x$$

sind alle Kreise um den Ursprung (mit x, y auf den Achsen), und der Ursprung – dieser entspricht der konstanten Lösung $x \equiv 0, y \equiv 0$. Siehe das Beispiel in Abschnitt 2.2.

Beispiel: Wir betrachten die Gleichung $y' = y$. Sie entspricht dem Vektorfeld $V(y) = y$ auf \mathbb{R} . Die Lösung kennen wir schon, aber die Orbits der Lösungen können wir auch ohne deren Kenntnis aus der Zeichnung ablesen: Die Menge $\{0\}$ und die Halbachsen $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$. Diese entsprechen den Lösungen $y(t) = Ce^t$ mit $C = 0, C < 0, C > 0$ (in dieser Reihenfolge). Beachte, dass sämtliche Lösungen mit $C > 0$ denselben Orbit haben.

Einen ersten Überblick über die Form der Orbits liefert der folgende Satz:

5.4.3 Satz

Jeder Orbit \mathcal{O} von V hat einen der drei folgenden Typen:

- (1) Er besteht nur aus *einem Punkt* p ; dann ist $V(p) = 0$, und die zugehörigen Integralkurven sind konstant: $y(t) = p$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
- (2) Er besteht aus einer *geschlossenen Kurve* (die nicht nur ein Punkt ist), das heißt: Für jede Integralkurve y von V mit diesem Orbit gilt:
 - ▷ y ist auf ganz \mathbb{R} definiert.
 - ▷ Es existiert ein $c > 0$ so, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt: $y(t) = y(t + c)$, aber $y(s) \neq y(t)$ für $t < s < t + c$.
- (3) Er ist der Orbit einer *injektiven Integralkurve* y von V , das heißt $t \neq s \Rightarrow y(t) \neq y(s)$.

In den letzten beiden Fällen gilt außerdem $V(p) \neq 0$ für alle $p \in \mathcal{O}$.

Einen Punkt p mit $V(p) = 0$ nennt man **kritischen oder stationären Punkt** von V . Die Zahl c in Fall (2) heißt **Periode** des Orbits.

Beweis: Sei y eine Integralkurve von V . Wir betrachten zwei Fälle:

- (1) $\exists t_0 : y'(t_0) = 0$. Setze $p := y(t_0)$. Dann folgt $V(p) = V(y(t_0)) = y'(t_0) = 0$. Die Kurve z mit $z(t) \equiv p$ ist dann eine Lösung, und mit dem Lemma zur Zeitverschiebung folgt:

$$(\text{Orbit von } y) = (\text{Orbit von } z) = \{p\}$$

Also eine Menge, die nur aus einem Punkt besteht. Also Fall (1).

- (2) $\forall t : y'(t) \neq 0$. Man kann weiter unterscheiden:

- (a) y ist nicht injektiv, das heißt $\exists t_0 \neq s_0 : y(t_0) = y(s_0)$.

Mit dem Lemma zur Zeitverschiebung folgt dann, dass für alle t im Definitionsbereich gilt: $y(t) = y(t + C)$, wobei $C = s_0 - t_0$. Das heißt, dass y periodisch ist. Sei $P = \{p > 0 : \text{Es gilt } y(t) = y(t + p) \text{ für alle } t\}$. Die Menge P hat ein kleinstes Element (Übung). Nenne dies c . Also Fall (2).

- (b) y ist injektiv, das ist Fall (3). □

Wir betrachten den Fall (3) etwas genauer:

5.4.4 Satz

Sei $y : (\alpha, \beta) \rightarrow U$ eine injektive maximale Integralkurve des Vektorfelds V . Dann gilt:

- (i) Falls $\beta < \infty$, so verlässt y jede kompakte Teilmenge von U für $t \rightarrow \beta^-$, d.h.: Für jede kompakte Menge $K \subset U$ und jedes $\gamma < \beta$ gibt es ein $t \in (\gamma, \beta)$ mit $y(t) \notin K$.
- (ii) Falls der Grenzwert $p = \lim_{t \rightarrow \beta} y(t)$ existiert und in U liegt, so folgt $\beta = \infty$, und p ist ein stationärer Punkt von V , d.h. $V(p) = 0$.

Analoges gilt für α .

Beweis:

(i) Angenommen, die Behauptung wäre falsch. Das heißt, es existiert ein kompaktes $K \subset U$ und ein $\gamma < \beta$ so, dass für alle $t \in (\gamma, \beta)$ gilt: $y(t) \in K$. Wir wollen zeigen, dass y dann keine *maximale* Lösung ist.

Da V stetig ist, ist auch $\|V\|$ stetig und damit beschränkt auf der kompakten Menge K . Also gibt es ein $M \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in K$ gilt: $\|V(x)\| \leq M$.

Wähle ein beliebiges $t_0 \in (\gamma, \beta)$. Da $y' = V(y)$ gilt, folgt

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t V(y(s)) ds, \quad t \in (\alpha, \beta) \quad (*)$$

Da $\|V(y(s))\| \leq M$ für alle $s \in (\gamma, \beta)$ ist, existiert das uneigentliche Integral $\int_{t_0}^{\beta} V(y(s)) ds$ nach dem Majorantenkriterium (angewendet auf jede Komponente), insbesondere ist

$$\int_{t_0}^{\beta} V(y(s)) ds = \lim_{t \rightarrow \beta^-} \int_{t_0}^t V(y(s)) ds.$$

Definiert man also $y(\beta) = y_0 + \int_{t_0}^{\beta} V(y(s)) ds$, so ist y auf $(\alpha, \beta]$ stetig und erfüllt dort (*), und daher die Differentialgleichung $y' = V(y)$.

Dies steht im Widerspruch dazu, dass y auf (α, β) eine maximale Lösung ist.

(ii) Da U offen ist, gibt es $\varepsilon > 0$ mit $K := \overline{K_\varepsilon(p)} \subset U$. Nach Definition des Grenzwertes verlässt y die kompakte Menge K für $t \rightarrow \beta^-$ nicht, also folgt $\beta = \infty$ nach (i).

Idee: Wäre $V(p) \neq 0$, so würde $y'(t)$ für große t immer ungefähr in Richtung $V(p)$ zeigen und müsste daher unbeschränkt sein.

Genauer: Da V stetig ist, gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} y'(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} V(y(t)) = V(p)$. Angenommen, es wäre $V(p) \neq 0$. Dann ist eine der Komponenten des Vektors $V(p)$ ungleich Null. Sei etwa $a := V_1(p) > 0$, der Fall $a < 0$ läuft analog. Da V_1 stetig ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $V_1(x) > \frac{a}{2}$ für $x \in K_\varepsilon(p)$. Wegen $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = p$ gibt es ein t_0 mit $y(t) \in K_\varepsilon(p)$ für $t \geq t_0$. Aus $y'_1(t) = V_1(y(t))$ folgt dann $y'_1(t) \geq \frac{a}{2}$ für $t \geq t_0$, und daraus durch Integration $y_1(t) \geq y_1(t_0) + (t - t_0)\frac{a}{2}$ für $t \geq t_0$. Damit ist y_1 für $t \rightarrow \infty$ unbeschränkt, im Widerspruch zu $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = p$. \square

Bemerkung: Es kann auch der Fall auftreten, dass $\beta = \infty$, aber der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ existiert nicht. Wie kompliziert der Orbit dann sein kann, hängt von der Dimension ab (sagen wir $U = \mathbb{R}^n$ der Einfachheit halber):

- ▷ Falls $n = 1$, so folgt $y(t) \rightarrow \infty$ oder $y(t) \rightarrow -\infty$ für $t \rightarrow \infty$.
- ▷ Falls $n = 2$, kann man zumindest beschränkte Orbits noch recht gut beschreiben: Ein beschränkter Orbit ist entweder stationär oder periodisch oder muss sich einem geschlossenen Orbit immer mehr annähern (falls es keine stationären Punkte gibt; andernfalls gilt eine anderslautende, aber ähnliche Aussage). Das ist zwar komplizierter, aber immer noch recht übersichtlich. (Referenz: Satz von Poincaré-Bendixson)

Beispiel: Das Vektorfeld $V(x, y) = (x - y - x(x^2 + y^2), x + y - y(x^2 + y^2))$. Schreibt man das zugehörige System von Differentialgleichungen

$$x' = x - y - x(x^2 + y^2)$$

$$y' = x + y - y(x^2 + y^2)$$

in Polarkoordinaten um – zur Erinnerung: diese sind mittels $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ definiert –, erhält man das einfachere System

$$r' = r(1 - r^2)$$

$$\varphi' = 1$$

Die Gleichung für r lässt sich leicht analysieren (siehe nächstes Kapitel), und man sieht, dass sich jeder Orbit, der mit einem $r \notin \{0, 1\}$ startet, für $t \rightarrow \infty$ spiralförmig dem Einheitskreis annähert. Details als Übung.

- ▷ Falls $n \geq 3$, so kann der Orbit sehr kompliziert (chaotisch) aussehen. Beispiel zum Weiterlesen: Der »Lorentz-Attraktor«.

Der Fall $n = 1$

In einer Dimension hat man die einzelne Gleichung $y' = V(y)$. Diese kann mittels Separation der Variablen gelöst werden: Nach Integration erhält man $t = \int \frac{1}{V(y)} dy$, und die Lösung erhält man durch Bilden der Umkehrfunktion. Natürlich muss man bei Nullstellen von V aufpassen, und das Integral und die Umkehrfunktion können eventuell nicht explizit berechnet werden.

Die Orbits und das qualitative Verhalten der Lösungen lassen sich jedoch *ganz ohne Rechnung* angeben!

5.4.5 Satz

Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen und $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Die Orbits von V kann man wie folgt beschreiben:

- (1) Jeder Punkt $p \in U$ mit $V(p) = 0$ ist ein Orbit.
- (2) Die Menge $\{y \in U : V(y) \neq 0\}$ ist eine höchstens abzählbare Vereinigung offener Intervalle. Jedes dieser Intervalle ist ein Orbit.

Ist (a, b) eines dieser Intervalle und $y : (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$ eine maximale Integalkurve mit Orbit (a, b) , so gilt, falls $V > 0$ auf (a, b) :

$$\lim_{t \rightarrow \alpha} y(t) = a \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \beta} y(t) = b$$

(Falls $V < 0$ auf (a, b) , so vertauscht man hier a und b .)

Falls $a \in U$, so ist $\alpha = -\infty$, und falls $b \in U$, so ist $\beta = \infty$.

Da nach Annahme $V \neq 0$ auf (a, b) , hat V nach dem Zwischenwertsatz dort konstantes Vorzeichen. $a = -\infty$ und $b = \infty$ sind zugelassen (diese liegen aber nicht in U).

Beispiele:

- (1) Im Beispiel $V(y) = y$ sind die Orbits $(-\infty, 0)$, $\{0\}$, $(0, \infty)$. Alle Integalkurven sind auf ganz \mathbb{R} definiert. Dies folgt nicht aus dem Satz, wir wissen es aus der expliziten Lösung $y(t) = Ce^t$.
- (2) $V(y) = (y - a) \cdot (y - b)$ hat die zwei Nullstellen a, b . Sei $a < b$. Die Orbits sind dann $(-\infty, a)$, $\{a\}$, (a, b) , $\{b\}$, (b, ∞) . Die zugehörigen Integalkurven sind nach dem Satz für die mittleren drei Orbits auf ganz \mathbb{R} definiert. Man kann zeigen, dass die anderen Integalkurven nicht für alle Zeiten definiert sind. (Entweder durch explizite Lösung oder durch Vergleich mit der Gleichung $y' = y^2$. Hier muss man sich natürlich erst einmal einen geeigneten Vergleichssatz überlegen.)

Beweis (von Satz 5.4.5): Da V stetig differenzierbar ist, ist es lokal Lipschitz-stetig. (1) haben wir schon bewiesen. Da V stetig ist, ist $U' = \{y \in U : V(y) \neq 0\}$ offen. Jede offene Teilmenge von \mathbb{R} ist eine disjunkte Vereinigung abzählbar vieler offener Intervalle. (Beweis: Erkläre auf U' eine Äquivalenzrelation wie folgt: y_1, y_2 heißen äquivalent, falls das Intervall zwischen y_1 und y_2 ganz in U' liegt. Man sieht leicht, dass die Äquivalenzklassen offene Intervalle sind, deren Endpunkte nicht zu U' gehören. Wählt man in jedem dieser Intervalle eine rationale Zahl, so erhält man eine injektive Abbildung von der Menge dieser Intervalle nach \mathbb{Q} , also ist diese Menge höchstens abzählbar.)

Sei (a, b) eines dieser Intervalle. Sagen wir $V(t) > 0$ für alle $t \in (a, b)$, der andere Fall geht analog. Sei $y_0 \in (a, b)$, $t_0 \in \mathbb{R}$ beliebig und $y : (\alpha, \beta) \rightarrow U$ die maximale Integalkurve von V mit $y(t_0) = y_0$. Wir zeigen zunächst:

Behauptung: $y(t) \in (a, b)$ für alle t .

Beweis: Sonst muss nach dem Zwischenwertsatz $y(t_0) = a$ oder $y(t_0) = b$ sein für ein t_0 . Sagen wir

$y(t_0) = b$, der andere Fall geht analog. Insbesondere folgt $b \in U$, und wegen $b \notin U'$ muss $V(b) = 0$ sein, also ist $\{b\}$ ein Orbit. Da verschiedene Orbits disjunkt sind, kann der Orbit von y nicht durch b laufen, ein Widerspruch.

Wir zeigen nun $\lim_{t \rightarrow \beta} y(t) = b$, der andere Grenzwert geht analog. Dann folgt insbesondere, dass (a, b) ein Orbit ist. Da $y(t) \in (a, b)$ und daher $y'(t) = V(y(t)) > 0$ für alle t ist, wächst y monoton, damit existiert $c := \lim_{t \rightarrow \beta} y(t)$ (möglicherweise $c = \infty$), und $c \leq b$. Wäre $c < b$, so folgte $c \in (a, b) \subset U$, und nach Satz 5.4.4(ii) wäre c ein stationärer Punkt von V , was wegen $V > 0$ auf (a, b) nicht geht. Also folgt $c = b$.

Die letzte Aussage folgt direkt aus Satz 5.4.4(ii). \square

5.5 Lineare Systeme erster Ordnung

Für lineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung gibt es eine ähnliche Theorie wie für eine lineare Gleichung n -ter Ordnung: Der Lösungsraum ist ein Vektorraum, es gibt Fundamentallösungen, die inhomogene Gleichung kann mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten gelöst werden, sobald man die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung kennt, etc.

Ähnlich wie in der linearen Algebra, wo man lineare Gleichungssysteme mit Matrizen beschreibt, ist auch hier die Verwendung von Matrizen nützlich. Sie führt vor allem zu einem Gewinn an Übersichtlichkeit. Wir werden auch sehen, dass zentrale Konzepte der linearen Algebra, zum Beispiel die Eigenwerte einer linearen Abbildung (oder Matrix) und ihre Diagonalisierung eine zentrale Rolle spielen und eine explizite Lösung der linearen Systeme mit konstanten Koeffizienten erlauben.

Da sich die Gleichung n -ter Ordnung als System von n Gleichungen erster Ordnung umschreiben lässt, umfassen die hier gewonnenen Resultate die uns schon bekannten und geben für diese ein neues Verständnis. Insbesondere werden wir im Fall konstanter Koeffizienten auf neue Weise verstehen, warum bei mehrfachen Nullstellen des charakteristischen Polynoms Lösungen der Form $t^k e^{\lambda t}$ auftauchen. Lösungen dieser Art treten genau dann auf, wenn die Matrix, die das System beschreibt, nicht diagonalisierbar ist. Sie sind daher eng mit dem Phänomen nilpotenter Anteile linearer Abbildungen verwoben. Für eine vollständige Analyse dieses Problems wird die Jordansche Normalform aus der linearen Algebra gebraucht. Wir streifen dies nur am Rande.

Eine Andeutung für diese Brücke zur linearen Algebra findet sich schon im Begriff des *charakteristischen Polynoms*, den wir für Gleichungen n -ter Ordnung eingeführt haben und den wir nun mit dem für Matrizen bekannten charakteristischen Polynom in Verbindung bringen.

Zunächst führen wir einige Notationen und Begriffe ein:

Zu $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} sei $M_n(\mathbb{K}) := \mathbb{K}^{n \times n} := \{A : A \text{ ist eine } n \times n\text{-Matrix mit Einträgen aus } \mathbb{K}\}$. $M_n(\mathbb{K})$ ist ein \mathbb{K} -Vektorraum (\mathbb{K} -VR), der isomorph zum $K^{(n^2)}$ ist. Wir schreiben $M_n(\mathbb{K}) \cong K^{(n^2)}$, bzw. vielleicht etwas einprägsamer: $\mathbb{K}^{n \times n} \cong \mathbb{K}^{n \cdot n}$.

Ein Beispiel für $n = 2$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K}) \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^4$$

Damit können wir eine Norm ähnlich der euklidischen Norm auf $K^{(n^2)}$ auch auf $M_n(\mathbb{K})$ definieren:

Zu $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ sei

$$\|A\|_2 := \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

5.5.1 Definition

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Es seien stetige Abbildungen $A : I \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ und $b : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ gegeben. Die Gleichung

$$y' = A(t)y + b(t)$$

heißt dann **lineares System erster Ordnung**. Auch hier ist durch $y(t_0) = y_0$ mit $t_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{K}^n$ ein AWP formuliert.

Die Lösung eines solchen Systems ist eine Kurve $y : I \rightarrow \mathbb{K}^n$.

Bemerkung: Wie angekündigt schreiben wir nun lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung der Form

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b_0(t)$$

als lineares System *erster* Ordnung. Wie in Abschnitt 5.1 schreiben wir dazu

$$z_1 := y, \quad z_2 := y', \quad \dots, \quad z_n = y^{(n-1)}$$

und schreiben

$$\begin{array}{rcl} z_1' & = & z_2 \\ z_2' & = & z_3 \\ \vdots & & \ddots \\ z_{n-1}' & = & z_n \\ z_n' & = & -a_0(t)z_1 - a_1(t)z_2 - a_2(t)z_3 \dots - a_{n-1}(t)z_n + b_0(t) \end{array}$$

bzw. in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \dots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}}_{A(t)} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0(t) \end{pmatrix}}_{b(t)}$$

Die Matrix $A(t)$ ist übrigens das Transponierte der sogenannten **Begleitmatrix** des Polynoms $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}(t)\lambda^{n-1} + \dots + a_1(t)\lambda + a_0(t)$.

Das charakteristische Polynom der Begleitmatrix von p ist wieder p ! Damit haben wir den früher eingeführten Begriff des charakteristischen Polynoms für lineare Systeme n -ter Ordnung im Falle konstanter Koeffizienten mit dem von Matrizen in Verbindung gebracht.

Beispiel: Wir übersetzen die inhomogene lineare DGL 2. Ordnung $y'' + py' + qy = f$ in ein System erster Ordnung. Setze $z_1 = y, z_2 = y'$, dann ist die DGL für y äquivalent zu dem System $z' = Az + F$ für $z = (z_1, z_2)^T$

$$\begin{array}{rcl} z_1' & = & z_2 \\ z_2' & = & -qz_1 - pz_2 + f' \end{array} \quad \text{also} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ f' \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom von A ist $\lambda^2 - (\text{Spur } A)\lambda + \det A = \lambda^2 + p\lambda + q$, also gleich dem charakteristischen Polynom der Gleichung $y'' + py' + qy = f$.

5.5.2 Lemma

Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$ und $v \in \mathbb{K}^n$. Dann gilt: $\|Av\| \leq \|A\|_2 \cdot \|v\|$

Beweis: Dies sei Ihnen als Übung überlassen. Es handelt sich nur um eine einfache Rechnung, bei der unter anderem die Cauchy-Schwarz-Ungleichung anzuwenden ist. \square

5.5.3 Satz

Das in Definition 5.5.1 formulierte Anfangswertproblem hat eine eindeutige Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{K}^n$.

Beweis: Wir setzen $F(t, y) := A(t)y + b(t)$. Sei $J \subset I$ ein kompaktes Intervall. Wenn F auf $J \times \mathbb{K}^n$ Lipschitzstetig bzgl. y ist, so folgt mit dem globalen Satz von Picard-Lindelöf die Existenz einer Lösung auf J . Diese Lösungen lassen sich mittels einer Ausschöpfung von I durch kompakte Intervalle (vgl. das Ende des Beweises von Satz 5.2.3) zu einer Lösung auf ganz I zusammensetzen.

Es bleibt also zu zeigen:

$$\exists L \in \mathbb{R} \quad \forall t \in J \quad \forall y, z \in \mathbb{K}^n : \|F(t, y) - F(t, z)\| \leq L \cdot \|y - z\|$$

Es ist nun aber gerade

$$\|F(t, y) - F(t, z)\| = \|A(t)y + b_0(t) - A(t)z - b_0(t)\| = \|A(t) \cdot (y - z)\|$$

Da A stetig auf dem kompakten Intervall J ist, folgt, dass $\|A(t)\|_2$ beschränkt ist, das heißt es gibt ein $L \in \mathbb{R}$ so, dass für alle $t \in J$ gilt: $\|A(t)\|_2 \leq L$. Mit dem Lemma 5.5.2 folgt:

$$\|A(t) \cdot (y - z)\| \leq \|A(t)\|_2 \cdot \|y - z\| \leq L \cdot \|y - z\|$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Wir betrachten nun zunächst die homogene Gleichung.

5.5.4 Satz

Sei A wie oben und $\mathcal{L} = \{y : y' = A(t)y\}$. Dann gilt:

- (1) Die Menge \mathcal{L} ist ein n -dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum.
- (2) Für alle $t_0 \in I$ gilt: Die Abbildung $\mathcal{L} \rightarrow \mathbb{K}^n$, $y \mapsto y(t_0)$ ist ein Isomorphismus.

Dies ist analog zum Satz 4.2.1 für eine lineare Gleichung n -ter Ordnung. Da diese Gleichung immer in ein lineares System überführt werden kann, folgt Satz 4.2.1 aus Satz 5.5.4. Damit ist der bisher noch fehlende Beweis dieses Satzes endlich nachgeliefert.

Beweis:

- (1) Dass \mathcal{L} ein Vektorraum ist, folgt wie üblich direkt aus der Linearität der Gleichung. Die Dimensionsaussage folgt aus (2), da \mathbb{K}^n die Dimension n hat und isomorphe Vektorräume dieselbe Dimension haben.
- (2) Die Linearität der Abbildung folgt unmittelbar aus der Definition der Addition von Funktionen: $(y + z)(t_0) = y(t_0) + z(t_0)$. Analog für Multiplikation mit Skalaren. Dass die Abbildung bijektiv ist, folgt direkt aus dem Existenz- und Eindeutigkeitsatz: Zu jedem $y_0 \in \mathbb{K}^n$ gibt es *genau* eine Lösung y mit $y(t_0) = y_0$. □

Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Genau wie bei einer homogenen linearen Gleichung n -ter Ordnung können wir auch für ein homogenes lineares System erster Ordnung Lösungen explizit berechnen, falls die Koeffizienten konstant sind. Wir betrachten also das Problem

$$y' = A \cdot y \quad \text{mit der Anfangsbedingung} \quad y(0) = y_0$$

wobei $A \in M_n(\mathbb{K})$ und $y_0 \in \mathbb{K}^n$.

Für $n = 1$ kennen wir die Lösung bereits, denn dann hat die Gleichung die Form $y' = a \cdot y$ ($a \in \mathbb{K}$). Die Lösung ist $e^{at}y_0$.

Hier sind zwei Ideen zur Lösung des allgemeinen Problems mit Matrizen:

▷ Versuche e^{At} so zu definieren, dass $y = e^{At}y_0$ eine Lösung ist.

Man könnte etwa versuchen, einfach die Definition der Exponentialfunktion in Analysis I zu imitieren, also $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ zu definieren. Das liefert tatsächlich eine Lösung! Diese Idee greifen wir weiter unten wieder auf.

▷ Versuche, Lösungen der Form $e^{\lambda t}y_0$ für spezielle $y_0 \in \mathbb{K}^n$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ zu finden. Durch Einsetzen erhalten wir eine Bedingung, mit der sich ein Verfahren zur Lösung angeben lässt:

$$\begin{aligned} (e^{\lambda t}y_0)' &= \lambda e^{\lambda t}y_0 \stackrel{!}{=} A \cdot e^{\lambda t}y_0 \\ \Leftrightarrow \quad \lambda y_0 &= Ay_0 \end{aligned}$$

Hier stoßen wir auf die Eigenwerte der Matrix A ! Damit lässt sich folgender Satz formulieren:

5.5.5 Satz

Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$. Dann gilt:

- (1) Sei $\lambda \in \mathbb{K}$, $v \in \mathbb{K}^n$. Die Funktion y mit $y(t) = e^{\lambda t}v$ ist eine Lösung von $y' = Ay$ genau dann, wenn $Av = \lambda v$.
- (2) Falls (v_1, \dots, v_n) eine Basis von \mathbb{K}^n aus Eigenvektoren von A mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ist, so bilden $y_1 = e^{\lambda_1 t}v_1, \dots, y_n = e^{\lambda_n t}v_n$ ein Fundamentalsystem für die DGL $y' = Ay$, d. h. sie bilden eine Basis des Lösungsraumes dieser Gleichung.

Beweis:

- (1) Dies wurde bereits in der Einführung zu diesem Satz bewiesen!
- (2) Dies folgt unmittelbar aus Satz 5.5.4(2), wenn man dort $t_0 = 0$ setzt: Da $y_1(0) = v_1, \dots, y_n(0) = v_n$ eine Basis von \mathbb{K}^n ist, und die Eigenschaft, eine Basis zu sein, unter Isomorphismen erhalten bleibt, ist (y_1, \dots, y_n) eine Basis des Lösungsraums \mathcal{L} . □

Konkret erhalten wir:

Verfahren: Sei (v_1, \dots, v_n) eine Basis aus Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Die allgemeine Lösung von $y' = Ay$ ist dann

$$y(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} v_i, \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$$

Um das Anfangswertproblem $y' = Ay$, $y(0) = y_0$ mit $y_0 \in \mathbb{K}^n$ zu lösen, brauchen wir nur die Koeffizienten c_i so zu wählen, dass $y_0 = \sum_{i=1}^n c_i v_i$ (das geht, da (v_1, \dots, v_n) eine Basis von \mathbb{K}^n ist).

$$\text{Denn dann ist } y(0) = \sum_{i=1}^n c_i \underbrace{e^{\lambda_i \cdot 0}}_{=1} v_i = y_0.$$

Warnung: Dieses Verfahren funktioniert nur, wenn A wirklich eine Basis aus Eigenvektoren besitzt, wenn A also diagonalisierbar ist (siehe unten). Falls A nicht diagonalisierbar ist, muss man mehr arbeiten! (siehe dazu den Abschnitt nach Korollar 5.5.13))

Erinnerung an die lineare Algebra

Sei $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ das charakteristische Polynom von A . Dies ist ein Polynom vom Grad n , dessen Nullstellen die Eigenwerte von A sind. Folgende Bedingungen an A sind äquivalent:

- (a) Es gibt eine Basis aus Eigenvektoren von A .
- (b) Es gibt eine Basis, bezüglich der die durch A definierte lineare Abbildung durch eine Diagonalmatrix dargestellt wird.
- (c) A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix, d. h. es gibt eine invertierbare $n \times n$ -Matrix U , so dass $U^{-1}AU$ eine Diagonalmatrix ist.

Ist eine (und damit jede) dieser Bedingungen erfüllt, nennt man A **diagonalisierbar**.

Konkret: Sei v_1, \dots, v_n eine Basis aus Eigenvektoren mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Dies ist die Basis in (b), und die resultierende Diagonalmatrix ist $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (Einträge $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ auf der Diagonalen). In (c) kann man $U = (v_1, \dots, v_n)$ nehmen (wobei hier (v_1, \dots, v_n) die Matrix mit Spalten v_1, \dots, v_n bezeichnet), und die resultierende Diagonalmatrix ist wieder $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Dies ist einfach zu sehen:

$$A(v_1, \dots, v_n) = (Av_1, \dots, Av_n) = (\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n) = (v_1, \dots, v_n) \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Also $AU = U \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Multiplikation mit U^{-1} von links gibt (c).

Schließlich gilt noch: Falls p genau n verschiedene Nullstellen in \mathbb{K} hat, so ist A diagonalisierbar.

Die Fundamentalmatrix

5.5.6 Definition

Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$. Die **Fundamentalmatrix** des Systems $y' = Ay$ ist die Abbildung $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{K})$, die die Bedingungen

$$\Phi' = A \cdot \Phi \quad \text{und} \quad \Phi(0) = I$$

($I =$ Einheitsmatrix) erfüllt.

Genau genommen ist Φ eine *Matrixfunktion*, also eine Abbildung mit Werten im Raum der Matrizen. Alternativ kann man eine Matrixfunktion als Matrix auffassen, deren Einträge Funktionen von t sind. Formal: $\mathcal{F}(\mathbb{R}, M_n(\mathbb{K})) = M_n(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{K}))$.

Schreiben wir $\Phi = (z_1, \dots, z_n)$ für als Spaltenvektoren geschriebene Abbildungen $z_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n$, dann ist $\Phi' = (z_1', \dots, z_n')$ und $A\Phi = (Az_1, \dots, Az_n)$ sowie $I = (e_1, \dots, e_n)$, wobei e_i der i -te kanonische Basisvektor von \mathbb{K}^n ist. Damit sind die Bedingungen der Definition äquivalent zu

$$z_i' = Az_i, \quad \text{und} \quad z_i(0) = e_i$$

Da dieses AWP für jedes $i = 1, \dots, n$ eindeutig lösbar ist, folgt, dass genau ein Φ existiert, das die Bedingungen der Definition erfüllt.

Berechnung der Fundamentalmatrix

Sei y_1, \dots, y_n ein Fundamentalsystem für $y' = Ay$. Dann erhält man die Fundamentalmatrix als

$$\Phi(t) = Y(t)Y(0)^{-1}, \quad \text{wobei} \quad Y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$$

Denn die Matrixfunktion $t \mapsto Y(t)Y(0)^{-1}$ erfüllt die beiden Bedingungen an eine Fundamentalmatrix: Für $t = 0$ ergibt sich $Y(0)Y(0)^{-1} = I$, und $(Y(t)Y(0)^{-1})' = Y'(t)Y(0)^{-1} = (AY(t))Y(0)^{-1} = A(Y(t)Y(0)^{-1})$.

Falls A diagonalisierbar ist mit Basis von Eigenvektoren (v_1, \dots, v_n) und Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, erhält man

$$\Phi(t) = (e^{\lambda_1 t} v_1, \dots, e^{\lambda_n t} v_n) (v_1, \dots, v_n)^{-1}$$

Nutzen der Fundamentalmatrix:

Die Fundamentalmatrix erlaubt es, die Lösung des Systems $y' = Ay$ mit beliebiger Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ sofort hinzuschreiben:

$$y(t) = \Phi(t) \cdot y_0$$

Dann für dieses y gilt offenbar

$$y'(t) = \Phi(t)'y_0 = A\Phi(t)y_0 = Ay(t)$$

sowie $y(0) = \Phi(0)y_0 = Iy_0 = y_0$.

Damit ist die Fundamentalmatrix eng mit dem Fluss des Vektorfeldes $V(y) = Ay$ verwandt: Dieser ist gegeben durch $(t, y_0) \mapsto \Phi(t)y_0$.

Beispiel: Wir betrachten das Gleichungssystem

$$x' = y = 0x + 1y$$

$$y' = x = 1x + 0y$$

also das lineare System erster Ordnung $\vec{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{y}$ mit $\vec{y} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

▷ Bestimmung der Eigenwerte von $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$:

Es gilt $p(\lambda) = \lambda^2 - \text{Spur}(A)\lambda + \det A = \lambda^2 - 1$. Also hat A die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$.

▷ Bestimmung von Eigenvektoren zu den gefundenen Eigenwerten:

$$\lambda_1: (A - \lambda_1 \cdot I)v_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} v_1 = 0 \text{ z.B. } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2: (A - \lambda_2 \cdot I)v_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v_2 = 0 \text{ z.B. } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Also ist durch

$$\vec{y}_1 = e^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_2 = e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem gegeben. Die allgemeine Lösung lautet also (mit $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$):

$$\vec{y} = c_1 \vec{y}_1 + c_2 \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{-t} \\ c_1 e^t - c_2 e^{-t} \end{pmatrix}$$

▷ Bestimmung der Fundamentalmatrix: Wir verwenden die Formel $\Phi(t) = (e^{\lambda_1 t} v_1, \dots, e^{\lambda_n t} v_n) (v_1, \dots, v_n)^{-1}$.

Es ist

$$(v_1, v_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(Erinnerung: Berechnung der Inversen einer 2×2 Matrix:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

in Worten: Eins durch Determinante, dann vertausche die Diagonalelemente und setze ein Minuszeichen vor die beiden anderen Einträge der Matrix)

Also

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^t \\ e^t & e^{-t} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t + e^{-t} & e^t - e^{-t} \\ e^t - e^{-t} & e^t + e^{-t} \end{pmatrix}$$

▷ Das Phasenportrait:

Die allgemeine Lösung ist $\vec{y} = c_1 e^t v_1 + c_2 e^{-t} v_2$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Da $e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ und $e^t \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$ erhalten wir folgende Orbits:

- (1) Den Nullpunkt ($c_1 = c_2 = 0$)
- (2) Die zwei Halbgeraden $\mathbb{R}_{>0} v_2$ und $\mathbb{R}_{<0} v_2$. Diese werden in Richtung Nullpunkt durchlaufen (hier $c_1 = 0$ und $c_2 > 0$ bzw. $c_2 < 0$)
- (3) Die zwei Halbgeraden $\mathbb{R}_{>0} v_1$ und $\mathbb{R}_{<0} v_1$. Diese werden weg vom Nullpunkt durchlaufen (hier $c_1 = 0$ und $c_2 > 0$ bzw. $c_2 < 0$)
- (4) Hyperbeln, die die Halbgeraden der Richtungen $\pm v_1, \pm v_2$ als Asymptoten haben. Die Durchlaufrichtungen ergeben sich aus den Durchlaufrichtungen der Asymptoten (hier $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$)

(Hier fehlt noch ein Bild.)

Die Exponentialfunktion für Matrizen

Wir verfolgen nun die andere Idee zur Lösung von $y' = Ay$, $y(0) = y_0$: Versuche, eine Matrix e^{tA} so zu definieren, dass $y(t) = e^{tA} y_0$ die Lösung ist. Dazu die folgende Definition.

5.5.7 Definition

Zu $B \in M_n(\mathbb{K})$ definieren wir: $e^B := I + B + \frac{B^2}{2!} + \frac{B^3}{3!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B^i}{i!}$

Bevor wir uns über Konvergenz der Reihe Gedanken machen, vergewissern wir uns, dass dies eine nützliche Sache ist. Dazu rechnen wir formal nach, dass $y(t) = e^{tA} y_0$ die Lösung des Anfangswertproblems $y' = Ay$, $y(0) = y_0$ ist:

Die Definition ergibt mit $B = tA$

$$e^{tA} = I + tA + t^2 \frac{A^2}{2!} + t^3 \frac{A^3}{3!} + \dots$$

und damit folgt

$$y(t) = e^{tA} y_0 = y_0 + tA y_0 + t^2 \frac{A^2 y_0}{2!} + t^3 \frac{A^3 y_0}{3!} + \dots$$

für die Ableitung ergibt sich somit

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{d}{dt} e^{tA} y_0 = 0 + A y_0 + tA^2 y_0 + t^2 \frac{A^3 y_0}{2!} + \dots \\ &= A \underbrace{\left(y_0 + t y_0 + t^2 \frac{A^2 y_0}{2!} + \dots \right)}_{y(t)} \\ &= A y(t) \end{aligned}$$

Außerdem gilt offensichtlich $y(0) = y_0$.

Wir müssen nun zeigen, dass die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{B^i}{i!}$ konvergiert, und dass die gliedweise Differentiation der Reihe für e^{tA} erlaubt war. Bereits vor Definition 5.5.1 haben wir eine Norm auf $M_n(\mathbb{K})$ eingeführt: Zu $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ sei

$$\|A\|_2 := \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

5.5.8 Lemma

Für alle $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ gilt $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \cdot \|B\|_2$.

Beweis: Übung in der Cauchy-Schwarz-Ungleichung. □

Bemerkung: Aus (5.5.8) folgt per Induktion: $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Bemerkung: Auf $M_n(\mathbb{K})$ gibt es außer $\|\cdot\|_2$ noch viele weitere Normen, die in unterschiedlichen Kontexten nützlich sind. Die wichtigste ist die Operator-Norm:

$$\|A\| = \sup_{\substack{v \in \mathbb{K}^n \\ v \neq 0}} \frac{\|Av\|_{\text{eukl}}}{\|v\|_{\text{eukl}}}$$

(Übung: Dies ist eine Norm, und es gilt wieder $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.) Da $M_n(\mathbb{K})$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum ist, sind alle Normen darauf äquivalent. Daher ist es für das Folgende irrelevant, welche man verwendet.

Die Norm $\|\cdot\|_2$ ist unter zahlreichen Namen bekannt: Hilbert-Schmidt-Norm, Frobenius-Norm, Schur-norm.

5.5.9 Satz

Sei $B \in M_n(\mathbb{K})$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{B^i}{i!}$.

Beweis: Wir teilen den Beweis des Satzes in zwei Teile auf:

(1) $\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{B^k}{k!} \right\|_2$ konvergiert: Dies folgt aus dem Majoranten-Kriterium, denn $\left\| \frac{B^k}{k!} \right\|_2 \leq \frac{\|B\|_2^k}{k!}$

und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|B\|_2^k}{k!}$ konvergiert (Exponentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{C^k}{k!}$ mit $C = \|B\|_2$).

(2) Der Raum $M_n(\mathbb{K})$ mit der Norm $\|\cdot\|_2$ ist vollständig, da er gleich \mathbb{K}^{n^2} mit der euklidischen Norm ist. Es gilt: Sei (B_k) Folge in einem vollständigen normierten Raum. Konvergiert die Reihe reeller Zahlen $\sum \|B_k\|_2$, so konvergiert auch $\sum B_k$. Der Beweis ist vollkommen analog zum Beweis, dass für Reihen in \mathbb{R} gilt:

$$\text{Absolute Konvergenz} \implies \text{Konvergenz} \quad \square$$

Die Reihe e^{tA} darf auch gliedweise differenziert werden. Der Beweis ist derselbe wie für Reihen reeller Zahlen. Damit ist die Rechnung nach Definition 5.5.7 gerechtfertigt. Sie zeigte, dass $y(t) = e^{tA}y_0$ für jedes $y_0 \in \mathbb{K}^n$ das AWP $y' = Ay$, $y(0) = y_0$ löst. Da $\Phi(t)y_0$ dieselbe Eigenschaft und die Lösung eindeutig ist, haben wir bewiesen:

5.5.10 Satz

Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$. Das System $y' = Ay$ hat die Fundamentalmatrix $\Phi(t) = e^{tA}$.

Berechnung von e^B

Damit Satz 5.5.10 nützlich ist, müssen wir e^{tA} berechnen können. Dies direkt mittels der Definition zu machen, ist hoffnungslos (außer wenn A diagonal ist; versuchen Sie's!). Es gibt aber einen Trick: Erst diagonalisieren! Gehen wir Schritt für Schritt vor:

▷ Falls B eine Diagonal-Matrix ist, so lässt sich e^B schnell berechnen.

$$\text{Sei } B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}. \text{ Dann ist } B^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

$$\text{und somit } e^B = \begin{pmatrix} \sum \frac{\lambda_1^k}{k!} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sum \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

▷ Falls B diagonalisierbar ist, gilt (vgl. die Erinnerung an LinA nach Satz 5.5.5) mit $U = (v_1, \dots, v_n)$, wobei (v_1, \dots, v_n) eine Basis aus Eigenvektoren ist,

$$U^{-1}BU = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}}_{D = \text{diagonalisierte Matrix}}$$

Warum hilft das? Erstaunlicherweise gilt:

5.5.11 Satz

Es ist $e^{U^{-1}BU} = U^{-1}e^B U$ für alle $B, U \in M_n(\mathbb{K})$ mit U invertierbar.

Beweis: Für $(U^{-1}BU)^2$ lässt sich schreiben:

$$(U^{-1}BU)^2 = (U^{-1}BU) \cdot (U^{-1}BU) \stackrel{U \cdot U^{-1} = I}{=} U^{-1}B^2U$$

und allgemeiner

$$(U^{-1}BU)^k = (U^{-1}BU)(U^{-1}BU) \dots (U^{-1}BU) = U^{-1}B^kU$$

da sich alle zwischen den B 's stehenden Faktoren U, U^{-1} wegekürzen (formaler Beweis mit Induktion). Somit folgt mittels der Exponentialreihe

$$\begin{aligned} e^{U^{-1}BU} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(U^{-1}BU)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{U^{-1}B^kU}{k!} \\ &= U^{-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} \right) U = U^{-1}e^B U \end{aligned}$$

□

Wir lösen nun nach e^B auf, indem wir von links mit U und von rechts mit U^{-1} multiplizieren:

$$e^D = e^{U^{-1}BU} = U^{-1}e^B U \quad \Rightarrow \quad Ue^D U^{-1} = e^B$$

Also:

5.5.12 Satz

Angenommen $B \in M_n(\mathbb{K})$ ist diagonalisierbar. Sei (v_1, \dots, v_n) eine Basis aus Eigenvektoren, $Bv_i = \lambda_i v_i$ für $i = 1, \dots, n$. Setze $U = (v_1, \dots, v_n)$. Dann ist

$$e^B = U \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \cdot U^{-1}$$

In der Praxis der Differentialgleichungen wenden wir dies auf $B = tA$ an: Ist A diagonalisierbar mit Eigenvektoren (v_1, \dots, v_n) und Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, so ist auch tA diagonalisierbar mit denselben Eigenvektoren, aber den Eigenwerten $t\lambda_1, \dots, t\lambda_n$. Also ergibt sich:

5.5.13 Korollar

Angenommen A ist diagonalisierbar. Sei (v_1, \dots, v_n) eine Basis aus Eigenvektoren, $Av_i = \lambda_i v_i$ für $i = 1, \dots, n$. Setze $U = (v_1, \dots, v_n)$. Dann ist

$$\Phi(t) = U \cdot \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} \cdot U^{-1}$$

die Fundamentalmatrix des Differentialgleichungssystems $y' = Ay$.

Ausgeschrieben bedeutet dies $\Phi(t) = (e^{\lambda_1 t} v_1, \dots, e^{\lambda_n t} v_n) (v_1, \dots, v_n)^{-1}$, das ist dieselbe Formel, die wir schon nach Definition 5.5.6 auf andere Weise hergeleitet hatten.

Der nicht-diagonalisierbare Fall

Wie berechnet man e^B , wenn B nicht diagonalisierbar ist?

Dies geht mit Hilfe der *Jordanschen Normalform*, einer Verallgemeinerung der Diagonalisierung. Der Satz von der Jordanschen Normalform besagt, dass es eine invertierbare Matrix U gibt, so dass $U^{-1}BU$ eine Blockdiagonalmatrix ist, wobei die Blöcke die Form

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & 1 \\ 0 & 0 & \dots & & \lambda \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{\lambda I}{D}}_D + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & 1 \\ 0 & 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}}_N$$

haben. (Dabei durchläuft λ die Eigenwerte von B , und zu jedem Eigenwert gibt es so viele Blöcke, wie seine geometrische Vielfachheit angibt.) Ein solcher Block heißt **Jordan-Block**.

Wir betrachten hier nur den Spezialfall *eines* Jordan-Blockes $D + N$. Dann ist $D = \lambda I$, und N hat Einsen direkt oberhalb der Diagonalen und sonst überall Nullen. Die folgenden Eigenschaften sind fundamental:

5.5.14 Lemma

- (1) N ist nilpotent, genauer gilt $N^m = 0$, wobei m die Anzahl der Zeilen (oder Spalten) von N ist.
- (2) D und N kommutieren, d.h. $DN = ND$

Beachte, dass es viele Paare A, B von Matrizen gibt, für die $AB \neq BA$ ist!

Beweis: (1) Man rechne N^2, N^3, \dots aus und beobachte, dass sich mit jeder weiteren Potenz die Einsen um eine Stelle nach rechts verschieben (und die unterste Eins herausfällt). Für die $(m-1)$ te Potenz

$$\text{erhält man } N^{m-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und schließlich } N^m = 0.$$

(2) Das ist klar, da $D = \lambda I$. □

Für kommutierende Matrizen gilt die übliche Potenzregel:

5.5.15 Satz

Wenn $A \cdot B = B \cdot A$, dann gilt $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.

Achtung! Ohne die Voraussetzung gilt im Allgemeinen $e^{A+B} \neq e^A \cdot e^B$.

Beweis: Sei $A \cdot B = B \cdot A$. Dann ist

$$e^{A+B} = I + (A+B) + \frac{(A+B)^2}{2!} + \frac{(A+B)^3}{3!} + \dots,$$

dabei ist $(A+B)^2 = (A+B) \cdot (A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$. Wegen $AB = BA$ folgt dann $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. Analog $(A+B)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} A^i B^{k-i}$ (exakt: mit Induktion über k), und daraus die Behauptung mittels des Cauchy-Produkts wie bei der Exponentialfunktion für Zahlen. □

Damit können wir berechnen:

$$e^{D+N} = e^{N+D} = e^N e^D = \left(I + N + \frac{N^2}{2!} + \dots + \frac{N^{m-1}}{(m-1)!} \right) e^D$$

(Die Exponentialreihe für N bricht ab wegen $N^m = 0$.) Wir erhalten für die Lösung der Differentialgleichung:

5.5.16 Satz

Sei $A \in M_m(\mathbb{K})$. Angenommen, es gibt eine invertierbare Matrix U , so dass $U^{-1}AU = D + N$ ein Jordan-Block mit $D = \lambda I$ ist. Dann gilt

$$e^{tA} = \left(I + t\tilde{N} + \dots + t^{m-1} \frac{\tilde{N}^{m-1}}{(m-1)!} \right) e^{t\lambda}$$

mit $\tilde{N} = UNU^{-1}$.

Beweis:

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{U t(D+N) U^{-1}} = U e^{tN+tD} U^{-1} = U e^{tN} e^{tD} U^{-1} = U \left(I + tN + \dots + t^{m-1} \frac{N^{m-1}}{(m-1)!} \right) e^{t\lambda} U^{-1} \\ &= \left(I + t\tilde{N} + \dots + t^{m-1} \frac{\tilde{N}^{m-1}}{(m-1)!} \right) e^{t\lambda} \end{aligned}$$

wegen $UN^k U^{-1} = (UNU^{-1})^k = \tilde{N}^k$. □

Beobachtung: Hier treten genau die Ausdrücke $t^j e^{t\lambda}$ auf, die wir schon von der linearen Gleichung n -ter Ordnung her kennen, wenn das charakteristische Polynom mehrfache Nullstellen hat!

In der Tat kann man zeigen, dass das lineare System, das einer solchen Gleichung zugeordnet ist, in diesem Fall niemals diagonalisierbar ist. Natürlich ergeben sich dann dieselben Lösungen wie für die Gleichung n -ter Ordnung berechnet.

Bemerkung: Der allgemeine Fall ist kaum komplizierter. Die Jordansche Normalform einer beliebigen Matrix A hat die Form $U^{-1}AU = D + N$, wobei D diagonal, N nilpotent und $DN = ND$ ist. (D braucht aber nicht konstante Diagonale zu haben.) Dann folgt

$$e^{tA} = \left(I + t\tilde{N} + \dots + t^{m-1} \frac{\tilde{N}^{m-1}}{(m-1)!} \right) U e^{tD} U^{-1}$$

mit $\tilde{N} = UNU^{-1}$.

Hier zeigt sich die wahre Stärke der Methode, e^{tA} zu verwenden!

Variation der Konstanten für lineare Systeme

Nun haben wir uns ausführlich mit homogenen Systemen beschäftigt, wie aber löst man inhomogene Gleichungen der Art

$$y'(t) = A \cdot y(t) + b(t) \quad \text{mit} \quad b : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n ?$$

Wir imitieren das Verfahren, das bei einer linearen Gleichung erster Ordnung erfolgreich war:

- ▷ Zunächst schreiben wir die allgemeine Lösung des homogenen Systems hin: Ist y_1, \dots, y_n ein Fundamentalsystem für $y' = Ay$, so ist die allgemeine Lösung

$$\sum_{i=1}^n c_i y_i(t) = Y(t)c, \quad Y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t)), \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

Beachte, dass der Konstantenvektor rechts steht, damit das Produkt Matrix mal Vektor richtig funktioniert.

- ▷ Nun ersetzen wir die Konstante c durch eine Funktion; da hier c ein Vektor ist, brauchen wir eine vektorwertige Funktion $t \mapsto c(t)$, $J \rightarrow \mathbb{K}^n$. Wir setzen also

$$y(t) = Y(t)c(t)$$

in die Gleichung ein und erhalten mit der Produktregel

$$\begin{aligned} y'(t) &= Y'(t)c(t) + Y(t)c'(t) \\ &= AY(t)c(t) + Y(t)c'(t) \\ &= Ay(t) + Y(t)c'(t) \end{aligned}$$

Damit dies gleich $Ay(t) + b(t)$ wird, muss $Y(t)c'(t) = b(t)$ sein, also $c'(t) = Y(t)^{-1}b(t)$. Die Matrix $Y(t)$ ist für jedes t invertierbar, da ihre Spalten $y_1(t), \dots, y_n(t)$ nach Satz 5.5.4(2) für jedes t linear unabhängig sind.

Als Ergebnis erhalten wir:

5.5.17 Satz (Variation der Konstanten für lineare Systeme)

Sei y_1, \dots, y_n ein Fundamentalsystem für $y' = Ay$, und sei $Y = (y_1, \dots, y_n)$ die $n \times n$ -Matrixwertige Funktion mit Spalten y_1, \dots, y_n . Dann ist $Y(t)$ für alle t invertierbar, und eine Lösung der inhomogenen Gleichung $y' = Ay + b(t)$ ist

$$y(t) = Y(t) \int Y(t)^{-1} b(t) dt$$

wobei $Y(t)^{-1}$ die inverse Matrix zu $Y(t)$ ist.

Für Y kann man zum Beispiel die Fundamentalmatrix verwenden. Für konkrete Rechnungen ist es aber ggf. einfacher, dies nicht zu tun. Z.B. im Fall, dass A diagonalisierbar ist, kann man $Y(t) = (e^{\lambda_1 t} v_1, \dots, e^{\lambda_n t} v_n)$ verwenden.

In der Herleitung oben haben wir stillschweigend verwendet:

5.5.18 Lemma

Die Produktregel ist für das Matrixprodukt anwendbar: $\frac{d}{dt} [Y(t)c(t)] = Y'(t)c(t) + Y(t)c'(t)$

Beweis: Matrixprodukt ausschreiben und übliche Produktregel anwenden! □

Bemerkung: Die Methode der Variation der Konstanten funktioniert genauso, wenn die Koeffizientenmatrix A von t abhängt. Allerdings ist es in diesem Fall schwieriger (und oft in expliziten Formeln unmöglich), sich ein Fundamentalsystem für die homogene Gleichung zu beschaffen.

Beispiel: Im Beispiel auf Seite 85 haben wir die DGL 2. Ordnung $y'' + py' + qy = f$ in ein System 1. Ordnung $z' = Az + F$ übersetzt. p, q, y, f sind hierbei Funktionen von t .

Für dieses System führen wir nun die Variation der Konstanten durch. Sei y, \tilde{y} ein Fundamentalsystem der Gleichung $y'' + py' + qy = 0$. Dann ist $z = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}, \tilde{z} = \begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{y}' \end{pmatrix}$ ein Fundamentalsystem für $z' = Az$. Wir setzen also $Z = (z, \tilde{z}) = \begin{pmatrix} y & \tilde{y} \\ y' & \tilde{y}' \end{pmatrix}$.

Variation der Konstanten für das System: Ansatz $z = Zc$ für eine vektorwertige Funktion $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$. Wie oben berechnet, führt das auf die Gleichung

$$Zc' = F, \quad \text{also} \quad \begin{pmatrix} y & \tilde{y} \\ y' & \tilde{y}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \begin{aligned} yc_1' + \tilde{y}c_2' &= 0 \\ y'c_1' + \tilde{y}'c_2' &= f \end{aligned}$$

Das ist genau das Ergebnis, das wir bei der Herleitung in Abschnitt 4.6 erhalten haben! Damit wird die dort vielleicht etwas unmotiviert erscheinende Methode noch einmal gerechtfertigt.

6 Differentiation von Funktionen mehrerer Variablen

Wir kommen nun zum zweiten großen Thema der Analysis II: Der Differentialrechnung in mehreren Variablen. Das bedeutet, wir betrachten Abbildungen $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$, suchen einen sinnvollen Ableitungsbegriff für diese und diskutieren Anwendungen davon.

In diesem Kapitel betrachten wir Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, also den Fall $m = 1$. Man spricht auch von »Funktionen mehrerer Variablen«.

Funktionen zweier Variablen (also $n = 2$) kann man sich mittels ihres Graphen vorstellen, der eine Fläche im Raum ist.

Funktionen dreier Variablen treten auch häufig auf. Z. B. die Temperaturverteilung im Raum: Für jedes $x \in \mathbb{R}^3$ ist $T(x)$ die Temperatur am Ort x (zu einem festen Zeitpunkt).

Berücksichtigt man auch zeitliche Änderungen, erhält man eine Funktion von vier Variablen: $T(x, t)$ ist die Temperatur am Ort x zum Zeitpunkt t .

Mathematisches Beispiel: Die Determinante; dies ist eine Funktion $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, also eine Funktion von n^2 Variablen.

Für weitere Beispiele siehe die Liste nach Satz 7.1.6.

6.1 Das Differential und die Richtungsableitung

Um eine Idee zu bekommen, wie man einen sinnvollen Ableitungsbegriff für Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ einführen kann, erinnern wir uns an die Bedeutung der Ableitung und der Differenzierbarkeit für Funktionen einer Variable. Es gibt (mindestens) zwei Interpretationen:

- (1) Geometrisch: Die Ableitung ist die Steigung der Tangente an den Graphen.
- (2) »Dynamisch«: Die Ableitung ist die momentane relative Änderung des Funktionswertes.

Etwas genauer: Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $U \subset \mathbb{R}$ und $a \in U$ ein Häufungspunkt von U .

- (1) $f'(a)$ ist die Steigung der Tangente an den Graphen von f , im Punkt $(a, f(a))$. Also ist die Tangente der Graph von

$$T(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Tangentialität bedeutet, dass $f(a + h) - T(a + h)$ für $h \rightarrow 0$ schneller als h gegen Null geht, also

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a) - f'(a)h}{h} = 0$$

Äquivalent dazu: $T(x)$ ist die beste lineare Approximation von $f(x)$ für x nahe a .

- (2) Ändert sich x von a nach $a + h$, so ändert sich der Funktionswert um $f(a + h) - f(a)$. Da sich dabei x um h geändert hat, ist die **relative Änderung**

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Die **momentane** relative Änderung des Funktionswertes bei $x = a$ ist (per Definition) der Grenzwert hiervon für $h \rightarrow 0$, also $f'(a)$.

Differenzierbarkeit bedeutet natürlich jeweils, dass der Grenzwert existiert.

Diese beiden Interpretationen führen für $n > 1$ zu zwei leicht unterschiedlichen, aber eng verwandten, Ableitungsbegriffen: Dem Differential und der Richtungsableitung.

- (1) Der Graph von f hat in jedem Punkt eine (n -dimensionale) Tangentialebene. Ebenen beschreibt man durch lineare Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Die lineare Abbildung, die die Tangentialebene im Punkt $(a, f(a))$ beschreibt, nennt man das **Differential** von f im Punkt a .

Diese »Ebenen« sind n -dimensional, daher spricht man für $n > 2$ auch von **Hyperebenen** (im \mathbb{R}^{n+1} , wo diese Graphen leben).

- (2) Für $n > 1$ kann man sich von a in verschiedenen Richtungen entfernen. Die momentane relative Änderung wird meist in verschiedenen Richtungen unterschiedlich sein. Also erhält man für jede Richtung eine Ableitung, die **Richtungsableitung**. (Beispiel: Beim Bergsteigen kann man den steilsten Weg gehen – größte Richtungsableitung –, oder aber in Serpentina – kleine (positive) Richtungsableitung; hier gibt $f(a)$ die Höhe über einem NN-Punkt a der Erdoberfläche an.)

Natürlich sind die beiden Ableitungsbegriffe eng verwandt.

Eine Feinheit in mehreren Dimensionen ist aber, dass die zugehörigen Differenzierbarkeitsbegriffe leicht unterschiedlich sind: Es gibt Funktionen, deren sämtliche Richtungsableitungen bei a existieren, die aber in a keine Tangentialebene besitzen! Wir diskutieren zunächst das Differential.

Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass der Graph $\{(h, L(h))\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ einer linearen Abbildung $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Hyperebene ist, und dass alle Ebenen durch den Nullpunkt, die die »vertikale« Richtung, d. h. den Vektor $(0, \dots, 0, 1)$, nicht enthalten, von dieser Form sind. Verschiebt man die Ebene nun so, dass der Nullpunkt nach $(a, f(a))$ gelangt, so erhält man den Graphen der Funktion

$$T(x) = f(a) + L(x - a)$$

Analog zum Fall $n = 1$ übersetzt sich also die Existenz einer (nicht-vertikalen) Tangentialebene in folgende Definition. Es ist bequemer, immer $h = x - a$ zu schreiben.

6.1.1 Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in U$.

f heißt **differenzierbar** in a , wenn es eine lineare Abbildung $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0$$

In diesem Fall schreibt man $Df|_a = L$ und nennt dies das **Differential** von f in Punkt a .

Statt »lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ « sagt man auch **Linearform auf \mathbb{R}^n** .

Vor allem in der älteren Literatur heißt $Df|_a$ auch »totales Differential« von f .

Bemerkung:

- (1) Es ist egal, welche Norm für $\|h\|$ im \mathbb{R}^n betrachtet wird, denn alle Normen im \mathbb{R}^n sind äquivalent. (Das haben wir allerdings nie gezeigt! Siehe z. B. Königsberger, Analysis II, Kap. 1.2 III.)
- (2) Alternativ kann man auch schreiben:

$$\text{Für } r(h) := f(a+h) - f(a) - L(h) \text{ gilt } r(h) = o(h),$$

das heißt $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$ (in Worten: $r(h)$ geht schneller gegen Null als $\|h\|$, für $h \rightarrow 0$).

- (3) Natürlich heißt f **differenzierbar auf U** , wenn f in jedem Punkt von U differenzierbar ist.

(4) Lineare Abbildungen $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ haben immer die Form

$$L(h) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot h_i$$

für gewisse $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Dies ist nichts anderes als die Matrixdarstellung von L bezüglich der Standardbasen von \mathbb{R}^n und \mathbb{R} . Die α_i , die zu $Df|_a$ gehören, werden wir bald berechnen.

(5) U wird als offen angenommen, da man möchte, dass sich $a + h$ dem Punkt a von allen Richtungen annähern kann. Dies ist etwas spezieller als im Fall $n = 1$, wo man bloß fordert, dass a ein Häufungspunkt von U ist. Wichtig ist bloß, dass die Ableitung eindeutig ist, wenn sie existiert.

Nach dieser Definition stellen sich für uns folgende Fragen:

- (1) Wenn L existiert, ist es dann auch eindeutig? Dies ist nicht offensichtlich, obwohl es durch die Bezeichnung $Df|_a$ suggeriert wird.
- (2) Wie lässt sich $Df|_a$ berechnen?
- (3) Wie lässt sich einer gegebenen Funktion ansehen, ob sie differenzierbar ist?

Diese Fragen werden im folgenden Abschnitt geklärt.

Dafür ist es nützlich, zunächst die Richtungsableitung einzuführen. Denn die partiellen Ableitungen, ein Spezialfall der Richtungsableitungen, sind in den meisten Fällen sehr einfach zu berechnen, und bestimmen das Differential.

6.1.2 Definition (Richtungsableitung)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $a \in U$ und $h \in \mathbb{R}^n$. Falls der Grenzwert

$$\partial_h f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t}$$

existiert, so heißt er **Richtungsableitung** von f bei a in Richtung h .

Bemerkung:

- (1) Da U offen ist, existiert $\varepsilon > 0$, so dass für $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| < \varepsilon$ folgt: $a + th \in U$. Somit ist der Grenzwertbegriff definiert.
- (2) Schreibt man $g(t) := f(a + th)$, dann ist

$$\partial_h f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0)$$

Abkürzend schreibt man auch

$$\partial_h f(a) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(a + th)$$

- (3) Das Wort »Richtungsableitung« ist etwas irreführend. Denn $\partial_h f(a)$ hängt nicht nur von der Richtung von h ab, sondern auch von dessen Länge. Zum Beispiel ist für $n = 1$:

$$\partial_h f(a) = hf'(a),$$

wie sofort aus der Kettenregel folgt. Manche definieren daher die Richtungsableitung nur für $\|h\| = 1$, ich finde das aber unpraktisch.

- (4) **Bedeutung der Richtungsableitung:** $\partial_h f(a)$ ist die momentane relative Änderung von $f(x)$, wenn sich x von a aus mit Geschwindigkeit(-svektor) h fortbewegt.

Beispiel: Sei $f(x_1, \dots, x_n) = \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$. Was sind die Richtungsableitungen von f ? Seien $a, h \in \mathbb{R}^n$.

Dann

$$\partial_h f(a) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\|a + th\|^2) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\|a\|^2 + 2t(a, h) + t^2\|h\|^2) = (2(a, h) + 2t\|h\|^2) \Big|_{t=0} = 2(a, h),$$

das Skalarprodukt von a und h . Zum Beispiel sind im Nullpunkt ($a = 0$) alle Richtungsableitungen gleich Null.

6.1.3 Definition (Partielle Ableitung)

Sei (e_1, \dots, e_n) die Standard-Basis von \mathbb{R}^n . Dann heißt für $j = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_j} := \partial_{e_j} f(a)$$

die j -te **partielle Ableitung** von f in a . Konkret (etwa für $j = 1$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(a)}{\partial x_1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_1) - f(a)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + t, a_2, a_3, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)}{t} \end{aligned}$$

Das bedeutet, es wird nur nach der j -ten Variablen abgeleitet, alle anderen werden als Konstanten betrachtet.

Beispiele: Zwei einfache Beispiele sollen die vorangegangene Definition verdeutlichen.

(1) Sei $f(x_1, x_2) = x_1^2 \cdot x_2$, dann ergibt sich für die partiellen Ableitungen nach x_1 und x_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= 2x_1 \cdot x_2 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) &= x_1^2 \end{aligned}$$

(2) Sei $f(x_1, x_2) = \sin(2x_1) \cdot e^{3x_2}$, dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= 2 \cos(2x_1) \cdot e^{3x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) &= 3 \sin(2x_1) \cdot e^{3x_2} \end{aligned}$$

Schreibweise: Andere gebräuchliche Schreibweisen für $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sind $\partial_{x_i} f$, $\partial_i f$, f'_{x_i} , oft auch f_{x_i} , f_i oder f'_i . Die Notation f_i und f'_i werde ich hier nicht verwenden, da Indizes schon zu vielen anderen Zwecken gebraucht werden.

Der Wert der partiellen Ableitung an der Stelle a muss streng genommen als $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ geschrieben werden, da zunächst die Ableitung (eine Funktion) gebildet und dann der Punkt a eingesetzt wird, nicht umgekehrt (man erhielte 0).

Ähnlich verhält es sich mit der Richtungsableitung. Die Schreibweise $(\partial_h f)(a)$ wäre also genauer.

Richtungsableitungen und Differential hängen wie folgt zusammen.

6.1.4 Satz

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ und f differenzierbar in $a \in U$. Dann existiert für jeden Vektor h die Richtungsableitung $\partial_h f(a)$ und es gilt:

$$\partial_h f(a) = Df_a(h)$$

Beweis: Zur Abkürzung sei $L = Df|_a$. Sei $h \in \mathbb{R}^n$ und $\delta > 0$ so klein, dass $\{a + th : |t| < \delta\} \subset U$. Für $|t| < \delta$ ist dann

$$\begin{aligned} f(a + th) &= f(a) + \underbrace{L(th)}_{t \cdot L(h)} + r(th) \\ \Leftrightarrow t \cdot L(h) &= f(a + th) - f(a) - r(th) \\ \Leftrightarrow L(h) &= \frac{f(a + th) - f(a)}{t} - \frac{r(th)}{t} \\ \Rightarrow L(h) &= \lim_{t \rightarrow 0} L(h) = \partial_h f(a), \end{aligned}$$

da $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{r(k)}{\|k\|}$, also mit $k = th$: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(th)}{|t|} = \lim_{t \rightarrow 0} \|h\| \frac{r(th)}{\|th\|} = 0$ (für $h \neq 0$, andernfalls ist nichts zu zeigen). \square

Bemerkung: Der Beweis zeigt auch, dass die lineare Abbildung L in Definition 6.1.1 eindeutig bestimmt ist.

Aus Satz 6.1.4 ergeben sich interessante Informationen sowohl über die Richtungsableitung als auch über das Differential:

6.1.5 Korollar

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ und f differenzierbar in $a \in U$. Dann gilt:

- (1) $\partial_h f(a)$ hängt linear von $h \in \mathbb{R}^n$ ab.
- (2) Für $h = h_1 e_1 + h_2 e_2 + \dots + h_n e_n$ gilt

$$Df|_a(h) = \partial_h f|_a = \sum_{i=1}^n h_i \cdot \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(a)}{\partial x_n} \right) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

Dies ist also die gesuchte Berechnungsmethode für $Df|_a(h)$, und gleichzeitig für $\partial_h f(a)$. Die $1 \times n$ Matrix $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$ stellt also $Df|_a$ bezüglich der Standardbasen von \mathbb{R}^n und \mathbb{R} dar. Sie heißt auch **Jacobi-Matrix** von f im Punkt a und wird mit $J_f(a)$ bezeichnet. Im Fall $n = 1$ hat sie nur den Eintrag $f'(a)$. Daher kann man sie als eine Kodierung der »Steigung« der Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt a betrachten.

Beweis:

- (1) Dies folgt aus Satz 6.1.4, da $Df|_a(h)$ linear von h abhängt.
- (2) Wegen der Linearität ist

$$\partial_h f(a) = \partial_{\sum h_i e_i} f(a) = \sum h_i \partial_{e_i} f(a) = \sum h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

Wende nun Satz 6.1.4 an. \square

Bemerkung: Eine Feinheit: Die Umkehrung des Satzes 6.1.4 gilt nicht! Das heißt, aus der Existenz aller Richtungsableitungen folgt nicht, dass f differenzierbar ist. Außerdem muss $\partial_h f(a)$ nicht linear in h sein, wenn f nicht differenzierbar in a ist.

Beispiel: Stellen Sie sich eine Stange vor, die in ihrem Mittelpunkt so gelagert ist, dass sie in beliebige Richtungen (außer vertikal) zeigen kann. Rotiert man die Stange eine halbe Drehung in horizontaler Richtung, so überstreicht sie genau die x, y Ebene (im (x, y, z) -Raum). Wackelt die Stange aber beim Rotieren auf und ab, so überstreicht sie eine Fläche. Es gilt dann: Diese Fläche hat im Nullpunkt keine Tangentialebene (außer wenn sich die Stange zufällig innerhalb einer festen »schiefen« Ebene bewegt). Stellt man

sich die Fläche als Graph einer Funktion $z = f(x, y)$ vor, so ist also f im Nullpunkt nicht differenzierbar. Andererseits existieren alle Richtungsableitungen bei $x = y = 0$.

Mathematisch: Zu $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ seien $r = r(x, y)$, $\phi = \phi(x, y)$ die Polarkoordinaten, d.h. r ist der Abstand zum Nullpunkt und $\phi \in [0, 2\pi)$ der (positiv gemessene) Winkel mit der x -Achse. Wir betrachten Funktionen der Form

$$f(x, y) = \begin{cases} rw(\phi) & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

für $w : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ (wobei der Übersichtlichkeit halber $r = r(x, y), \phi = \phi(x, y)$ abgekürzt ist). Es gilt (Übung!):

- (1) Die »einseitigen« Richtungsableitungen im Nullpunkt

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(th) - f(0)}{t}$$

existieren und sind gleich $f(h)$, für alle $h \in \mathbb{R}^2$.

- (2) Sei $h \in \mathbb{R}^2$. Die Richtungsableitung $\partial_h f(0)$ existiert $\Leftrightarrow f(h) = -f(-h)$.

Für $h \neq 0$ gilt dies genau dann, wenn $w(\phi(h)) = -w(\phi(-h))$ (und dies ist gleich $-w(\phi(h) + \pi)$, wenn man ϕ 2π -periodisch fortsetzt). Dies entspricht gerade den »Stangenflächen«: Zeigt die eine Hälfte der Stange nach oben, so zeigt die andere mit derselben Steigung nach unten.

Übrigens braucht hierbei w nicht einmal stetig zu sein!

- (3) f ist in 0 differenzierbar $\Leftrightarrow w(\phi) = C \cos(\phi - \phi_0)$ für gewisse $C, \phi_0 \in \mathbb{R}$. Dies entspricht dem Fall, wo die Stange sich in einer Ebene bewegt, nämlich wegen $\cos(\phi - \phi_0) = \cos \phi \cos \phi_0 - \sin \phi \sin \phi_0$ und $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$ in der Ebene $\{(x, y, z) : z = x \cdot C \cos \phi_0 - y \cdot C \sin \phi_0\}$.

Also gibt jede 2π periodische, aber π -»antiperiodische« Funktion w ein f , für das alle Richtungsableitungen in 0 existieren, aber nur die speziellen in (3) genannten Funktionen sind dort differenzierbar.

Man kann zum Beispiel $w(\phi) = \cos(3\phi)$ wählen: Die Stange wackelt bei einem Umlauf dreimal auf und ab.

Verschärft man aber die Bedingung an die partiellen Ableitungen ein wenig, so erhält man ein hinreichendes Kriterium für Differenzierbarkeit:

6.1.6 Satz

Existieren alle partiellen Ableitungen von f in einer Umgebung von a und sind sie stetig in a , dann ist f differenzierbar in a .

Beweis: Es ist übersichtlicher, den Beweis in zwei Dimensionen zu führen. Der allgemeine Fall geht analog. Nach Annahme existiert $\delta > 0$, so dass f und seine partiellen Ableitungen in $K_\delta(a)$ definiert sind. Für $\|h\| < \delta$ berechnen wir dann

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) \\ &= (f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2 + h_2)) + (f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2)) \\ &= h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, a_2 + h_2) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, \xi_2) \end{aligned}$$

für ein ξ_1 zwischen a_1 und $a_1 + h_1$ sowie ein ξ_2 zwischen a_2 und $a_2 + h_2$. Hierbei haben wir den Mittelwertsatz angewendet: Einmal auf die Funktion $t \mapsto f(t, a_2 + h_2)$ und einmal auf die Funktion $t \mapsto f(a_1, t)$.

Wir müssen nun eine Linearform L finden, so dass mit $r(h) = f(a+h) - f(a) - L(h)$ gilt, dass $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0$.

Aus Satz 6.1.5 wissen wir, dass der einzige Kandidat für L , der hierfür in Frage kommt, durch $L(h) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)$ gegeben ist. Mit diesem L rechnen wir also

$$r(h) = f(a+h) - f(a) - L(h) = h_1 \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, a_2 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \right)}_{A_1} + h_2 \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, \xi_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \right)}_{A_2}$$

Mit Cauchy-Schwarz folgt $\|r(h)\| \leq \|h\| \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$. Nun gilt $A_1 \rightarrow 0, A_2 \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$ wegen der Stetigkeit der partiellen Ableitungen bei a und damit $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0$. \square

Zusammenfassung:

Partielle Ableitungen existieren in Umgebung von a und sind stetig in $a \Rightarrow$ Differenzierbar in $a \Rightarrow$ Partielle Ableitungen existieren in a .

Aber die Umkehrungen gelten jeweils nicht. In der Praxis ist die Bedingung links meist erfüllt, also braucht man sich keine Sorgen zu machen.

6.2 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

Wie in einer Dimension gilt:

6.2.1 Satz

f ist differenzierbar in $a \Rightarrow f$ ist stetig in a

Beweis: Schreibe $f(a+h) - f(a) = L(h) + r(h)$, wobei $\frac{r(h)}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, dann folgt $r(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ und damit

$$f(a+h) - f(a) = L(h) + r(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

da lineare Abbildungen stetig sind (Koordinatendarstellung!), also $L(h) \rightarrow 0$ gilt. \square

Bemerkung: Hätte man Differenzierbarkeit als Existenz aller Richtungsableitungen definiert (ein naheliegender Gedanke), wäre dieser Satz falsch, vergleiche das Beispiel nach Korollar 6.1.5. Dies rechtfertigt also im Nachhinein die Definition der Differenzierbarkeit.

Wie immer ist es nützlich, ein paar Rechenregeln zu haben, mit denen man die Ableitung und die Differenzierbarkeit komplizierterer Funktionen aus der einfacherer Funktionen herleiten kann. Diese Rechenregeln sind ganz analog zu den uns bereits bekannten Regeln in \mathbb{R}^1 .

6.2.2 Satz (Algebraische Rechenregeln)

Wenn $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}, U \subset \mathbb{R}^n$ offen, und f, g in a differenzierbar sind, so gilt: $f + g, f \cdot g$ und $\alpha \cdot f$, $\alpha \in \mathbb{R}$, sind differenzierbar in a . Es gilt:

$$(1) D(f + g)|_a = Df|_a + Dg|_a$$

$$(2) D(f \cdot g)|_a = g(a)Df|_a + f(a) \cdot Dg|_a$$

$$(3) D(\alpha \cdot f)|_a = \alpha \cdot Df|_a$$

Wenn $g(a) \neq 0$, dann ist $\frac{f}{g}$ differenzierbar in a und

$$(4) D\left(\frac{f}{g}\right)|_a = \frac{g(a)Df|_a - f(a)Dg|_a}{g(a)^2}$$

Beweis: Ähnlich wie in \mathbb{R}^1 . \square

Die Kettenregel können wir bisher nur für Abbildungsverkettungen der Form $\mathbb{R} \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ formulieren:

6.2.3 Satz (Kettenregel)

Sei $\gamma : I \rightarrow U$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist $f \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Wenn $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ differenzierbar in t_0 und f differenzierbar in $a = \gamma(t_0)$ ist, dann ist $f \circ \gamma$ differenzierbar in t_0 und es gilt:

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = Df|_{\gamma(t_0)}(\gamma'(t_0)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} \cdot \gamma'_i(t_0)$$

Kurz: Die Ableitung von f entlang γ ist gleich der Richtungsableitung von f in Richtung $\gamma'(t_0)$.

Diese Formel heißt manchmal auch **Regel vom totalen Differential**.

Beweis: (obwohl wir das später allgemeiner beweisen werden, siehe Satz 7.1.4)

$$\triangleright \gamma \text{ differenzierbar in } t_0 \Leftrightarrow \gamma(t_0 + k) - \gamma(t_0) = \gamma'(t_0) \cdot k + r_1(k) \text{ mit } \lim_{k \rightarrow 0} \frac{r_1(k)}{k} = 0$$

$$\triangleright f \text{ differenzierbar in } a = \gamma(t_0) \Leftrightarrow f(a + h) - f(a) = Df|_a h + r_2(h) \text{ mit } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_2(h)}{\|h\|} = 0$$

Für $k \in \mathbb{R}$ genügend klein ist

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)(t_0 + k) - (f \circ \gamma)(t_0) &= f(\gamma(t_0 + k)) - f(\gamma(t_0)) = f(a + h) - f(a) \\ &= Df|_a h + r_2(h) \end{aligned}$$

wobei wir bei der zweiten Gleichheit $\gamma(t_0) = a$ verwendet und $h = \gamma(t_0 + k) - \gamma(t_0)$ gesetzt haben. Da γ differenzierbar ist, folgt $h = \gamma'(t_0)k + r_1(k)$, und einsetzen in $Df|_a h$ ergibt

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)(t_0 + k) - (f \circ \gamma)(t_0) &= Df|_a(\gamma'(t_0)k + r_1(k)) + r_2(h) \\ &= k Df|_a(\gamma'(t_0)) + \underbrace{Df|_a(r_1(k)) + r_2(h)}_{r(k)} \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung, wenn wir $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{r(k)}{k} = 0$ zeigen. Für den ersten Summanden folgt aus $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{r_1(k)}{k} = 0$ und der Stetigkeit der lineare Abbildung $Df|_a$, dass $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{Df|_a(r_1(k))}{k} = 0$. Schließlich ist $\frac{h}{k} = \gamma'(t_0) + \frac{r_1(k)}{k}$ für k nahe Null beschränkt, insbesondere ist mit $k \rightarrow 0$ auch $h \rightarrow 0$, und damit folgt

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{r_2(h)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{r_2(h)}{\|h\|} \underbrace{\frac{\|h\|}{k}}_{\rightarrow 0 \text{ beschränkt}} = 0$$

□

Beispiele:

(1) Sei $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ und $\gamma(t) = (t, 2t)$. Damit ergibt sich :

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)'(t) &= \frac{\partial f(\gamma(t))}{\partial x_1} \cdot \gamma'_1(t) + \frac{\partial f(\gamma(t))}{\partial x_2} \cdot \gamma'_2(t) \\ &= 2x_1 \cdot 1 + 2x_2 \cdot 2 \text{ mit } x_1 = t, x_2 = 2t \\ &= 2t + 4t \cdot 2 = 10t \end{aligned}$$

Das kann man auch direkt nachrechnen: $(f \circ \gamma)(t) = t^2 + (2t)^2 = 5t^2$, und dessen Ableitung ist $10t$.

(2) Sei $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ und $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Damit ergibt sich :

$$\begin{aligned}(f \circ \gamma)'(t_0) &= \frac{\partial f(\gamma(t_0))}{\partial x_1} \cdot \gamma_1'(t_0) + \frac{\partial f(\gamma(t_0))}{\partial x_2} \cdot \gamma_2'(t_0) \\ &= 2x_1(-\sin(t)) + 2x_2 \cos(t) \quad \text{mit } x_1 = \cos t, \quad x_2 = \sin t \\ &= -2 \cos(t) \sin(t) + 2 \sin(t) \cos(t) \\ &= 0\end{aligned}$$

Das ist nicht überraschend, da sich $\gamma(t)$ auf dem Einheitskreis bewegt, wo f konstant gleich Eins ist.

(3) Die Kettenregel ist äußerst nützlich. Sie gibt einem unter Anderem eine neue Methode, die Ableitung der Funktion $g(x) = x^x$, $x > 0$ zu berechnen: Setze $f(x, y) = x^y$, dann (in verkürzter Schreibweise)

$$\begin{aligned}g'(x) = \frac{d}{dx} (f(x, x)) &= \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=y} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x=y} \frac{dx}{dx} \\ &= (y \cdot x^{y-1} \cdot 1 + x^y \log x \cdot 1) \Big|_{x=y} \\ &= x^x + x^x \log x\end{aligned}$$

(ausführlich: $g(x) = f(\gamma(x))$ mit $\gamma(x) = (x, x)$ usw.) in Übereinstimmung mit dem Ergebnis der Berechnung über den Trick mittels $x^x = e^{x \log x}$. Diese neue Methode ist sicherlich systematischer!

Also: Man betrachtet den Exponenten als konstant und leitet nach der Basis ab, dann betrachtet man die Basis als konstant und leitet nach dem Exponenten ab, dann addiert man die Ergebnisse!

Eigentlich erstaunlich, dass dies stimmt (warum z. B. addieren der Ergebnisse, nicht etwa multiplizieren oder etwas anderes?). Das Addieren ist Ausdruck der Linearität des Differentials.

Das Differential für Funktionen auf Vektorräumen

Bei der Definition des Differentials kann \mathbb{R}^n durch einen beliebigen normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ ersetzt werden. f ist dann auf einer offenen Menge $U \subset V$ definiert und $L = Df|_a$ ist eine lineare Abbildung $V \rightarrow \mathbb{R}$ (auch **Linearform** auf V genannt). Definition 6.1.1 bleibt sonst unverändert, ebenso die Definition der Richtungsableitung von f , die jetzt für jedes $h \in V$ eine Zahl $\partial_h f(a)$ ergibt.

Wir nehmen nun an, dass V endlich-dimensional ist. Die partiellen Ableitungen beziehen sich auf eine spezielle Basis im \mathbb{R}^n , diesen Begriff kann man (wenn gewünscht) auf beliebiges V mit gegebener Basis erweitern. Die Berechnungsmethode bezieht sich dann auf die Darstellung von f in dieser Basis.

Dann gelten alle bisherigen Sätze, inklusive der Kettenregel, auch für beliebiges, endlich-dimensionales V .

Warum ist das interessant? Warum nicht beim \mathbb{R}^n bleiben? Hier sind drei Gründe.

1. Obwohl sich jeder (reelle, endlich-dimensionale) Vektorraum mittels Wahl einer Basis mit einem \mathbb{R}^n identifizieren lässt, haben manche Vektorräume keine natürlich vorgegebene Basis. Eine Basis zu wählen würde dann oft die Rechnungen unnötig kompliziert machen und den Blick vom Wesentlichen ablenken.

Beispiel: Betrachten Sie die Sphäre $S^2 := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$, einen Punkt $a \in S$ und den Tangentialraum an S^2 im Punkt a , d. h. die Menge

$$\{h \in \mathbb{R}^3 : \text{es existiert eine Kurve in } S^2 \text{ durch } a, \text{ die dort die Ableitung } h \text{ hat}\}.$$

Dies ist ein zwei-dimensionaler Untervektorraum des \mathbb{R}^3 . Finden Sie eine Basis, die irgendwie eine natürliche geometrische (oder sonstige) Bedeutung hat? Ich nicht.

2. Auch wenn es eine »einfache« oder natürliche Basis gibt, ist es nicht immer vorteilhaft, diese zum Rechnen zu verwenden. Zum Beispiel: $V = M_n(\mathbb{R})$, die Menge der $n \times n$ -Matrizen. Auf dieses Beispiel werden wir später noch eingehen, wenn wir die Abbildung $A \mapsto A^2$ untersuchen und damit die Existenz von Wurzeln für Matrizen nahe der Einheitsmatrix beweisen.
3. Für die »hohen« Anwendungen der Analysis ist es wichtig, auch unendlichdimensionale Vektorräume zuzulassen, z. B. beim Problem der Brachystochrone (wie kommt man von einem Punkt zu einem anderen in kürzester Zeit, wenn nur die Gravitation hilft?), allgemeiner in der Variationsrechnung.

Bemerkung: Hier noch ein paar Worte zum Fall $\dim V = \infty$. Der wesentliche Unterschied zu endlichen Dimensionen besteht darin, dass lineare Abbildungen $V \rightarrow \mathbb{R}$ nicht notwendig stetig sind. Die Stetigkeit von $Df|_a$ wurde in den Beweisen der Sätze 6.2.1 und 6.2.3 verwendet. Damit diese Sätze weiterhin gelten, fordert man die Stetigkeit von L in Definition 6.1.1 als Bedingung für die Differenzierbarkeit von f in a . Statt differenzierbar sagt man in unendlichen Dimensionen auch **Fréchet-differenzierbar** und nennt $Df|_a$ die **Fréchet-Ableitung** von f in a . Existieren alle Richtungsableitungen von f in a , so nennt man f **Gateaux-differenzierbar** in a .

Weiterhin sind in unendlichen Dimensionen nicht alle Normen äquivalent, daher ist es wichtig, zu sagen, welche Norm man gerade betrachtet (z. B. sind die Normen $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$ und $\|f\|_\infty = \sup_x |f(x)|$ auf $C([0,1])$ nicht äquivalent).

Die bisherigen Sätze gelten mit dieser modifizierten Definition dann auch in unendlich vielen Dimensionen, bis auf Korollar 6.1.5(2), Satz 6.1.6 und die zweite Gleichheit in Satz 6.2.3.

Ein interessantes unendlich-dimensionales Beispiel wird später behandelt (im Abschnitt über Variationsrechnung).

6.3 Erste Integrale für Differentialgleichungen

Mit Hilfe des Begriffs des Differentialials von Funktionen mehrerer Variablen können wir nun eine weitere wichtige Idee zur Untersuchung von Differentialgleichungen einführen.

6.3.1 Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $V : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig. Eine Funktion $E : U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **erstes Integral** von V , falls E auf jedem Orbit von V konstant ist.

Analog spricht man von einem ersten Integral eines Differentialgleichungssystems. Erste Integrale sind äußerst nützlich beim Lösen von Differentialgleichungen.

Beispiel: $V(x, y) = (-y, x)$, das entspricht dem System $x' = -y$, $y' = x$. Ein erstes Integral ist $E(x, y) = x^2 + y^2$, da die Orbits von V Kreise um $(0, 0)$ sind und E auf jedem Kreis um $(0, 0)$ konstant ist.

Bemerkung: Bei diesem Beispiel ist $f(x^2 + y^2)$, mit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig, auch ein erstes Integral. Jedes erste Integral von V ist von dieser Form. Denn ist F erstes Integral von V , so gilt: Für jedes $r \geq 0$ hat F auf dem Kreis vom Radius r um $(0, 0)$ einen konstanten Wert, da dieser Kreis ein Orbit von V ist. Definiere $f(r^2)$ als diesen Wert. Dann ist $F(x, y) = f(x^2 + y^2)$.

Im Folgenden sei eine Differentialgleichung bzw. ein Vektorfeld V gegeben. Wir wollen die folgenden Fragen beantworten:

- ▷ Wie erkennt man, ob eine Funktion ein erstes Integral ist?
- ▷ Was nutzt es, ein erstes Integral zu kennen?
- ▷ Wie findet man erste Integrale?

Wie erkennt man, ob E ein erstes Integral für V ist?

Die Definition bezieht sich auf die Orbits von V . Kann man diese Frage beantworten, ohne die Orbits erst zu bestimmen, d. h. im Wesentlichen ohne die Differentialgleichung zu lösen? Ja!

6.3.2 Satz

Sei $V : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $E : U \rightarrow \mathbb{R}$. Sei außerdem E differenzierbar auf U . Dann gilt:

E ist erstes Integral von $V \Leftrightarrow$ Für alle $a \in U$ ist $DE|_a(V(a)) = 0$.

Konkret heißt das:

$$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix} \quad \text{dann} \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial E}{\partial x_i}(a) V_i(a) = 0 \quad \text{für alle } a$$

Beweis:

E ist erstes Integral

\Leftrightarrow Für alle Integralkurven $\gamma : I \rightarrow U$ von V ist $t \mapsto E(\gamma(t))$ konstant

$$\Leftrightarrow \text{Für alle } \underbrace{\text{Integralkurven } \gamma}_{\gamma'(t)=V(\gamma(t))} \text{ ist } \underbrace{\frac{d}{dt}E(\gamma(t))}_{\substack{DE|_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) \\ =DE|_a(V(a)), a=\gamma(t)}} = 0 \text{ für alle } t$$

Da es durch jeden Punkt von U eine Integralkurve gibt, sind wir fertig. \square

Beispiel: Betrachten wir wieder $V(x, y) = (-y, x)$, also $V_1(x, y) = -y$, $V_2(x, y) = x$. Ohne die Orbits von V zu bestimmen, können wir sehen, dass $E(x, y) = x^2 + y^2$ ein erstes Integral ist:

$$\frac{\partial E}{\partial x} V_1(x, y) + \frac{\partial E}{\partial y} V_2(x, y) = 2x(-y) + 2yx = 0$$

Was nutzt es, ein erstes Integral zu kennen?

Eine Vorbemerkung: Natürlich ist jede konstante Funktion E ein erstes Integral für ein beliebiges Vektorfeld. Das ist uninteressant. Wir nehmen daher an, dass E nicht konstant ist. Die genauen Bedingungen für die Gültigkeit der folgenden Aussagen werden wir nicht formulieren. Sie sollen vielmehr einen ungefähren Eindruck der Situation geben. Genaue Formulierungen werden mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen möglich sein.

$n = 2$: Typischerweise ist $\{y : E(y) = c\} = E^{-1}(c)$ für die meisten $c \in \mathbb{R}$ eine Vereinigung von Kurven. Diese Kurven (oder Teile davon) sind die Orbits von V .

Beispiel: $V(x, y) = (-y, x)$ hat das erste Integral $E(x, y) = x^2 + y^2$. Also ist jeder Orbit von V Teil eines Kreises um $(0, 0)$, oder er besteht nur aus dem Nullpunkt.

Bemerkung: Ob eine gegebene Kurve ein Orbit ist oder aus mehreren Orbits besteht, lässt sich meist durch Untersuchung der stationären Punkte von V (d. h. Punkte p mit $V(p) = 0$) leicht entscheiden, ähnlich wie im Beweis von Satz 5.4.5.

Im Beispiel hat V keine stationären Punkte außerhalb des Nullpunktes, und daraus folgt leicht, dass die Orbits wirklich die vollständigen Kreise sind. Hieraus können wir folgern, dass die Orbits von V Kreise um $(0, 0)$ sind, ohne irgendeine Differentialgleichung gelöst zu haben!

Also: Für $n = 2$ liefert einem ein erstes Integral praktisch direkt die Orbits.

$n > 2$: Die Mengen $E^{-1}(c)$ sind typischerweise $(n - 1)$ -dimensionale Hyperflächen ($n = 3$: Flächen).

Beispiel: Sei $n = 3$ und $E(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, dann ist $E^{-1}(c) = \text{Sphäre vom Radius } \sqrt{c}$ (falls $c > 0$).

Damit liegt jeder Orbit von V in einer dieser (Hyper-) flächen \rightarrow Reduktion auf ein $(n - 1)$ -dimensionales Problem. Hat man ein zweites Integral F (also ein weiteres erstes Integral), so liegt jeder Orbit von V in einer der Mengen

$$\{y : E(y) = c_1, F(y) = c_2\}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Diese Mengen sind typischerweise (falls F unabhängig von E ist – dieser Begriff wird später erklärt) $(n - 2)$ -dimensional. Analog kann man mittels m unabhängigen Integralen die Orbits auf $(n - m)$ -dimensionale Mengen »einsperren«, für $m = 1, \dots, n - 1$. Im optimalen Fall findet man $(n - 1)$ unabhängige Integrale und kann so die Orbits direkt bestimmen.

Bemerkung: Selbst wenn man nur ein erstes Integral findet, ist die Reduktion um eine Dimension oft nützlich. Jedoch sind die Mengen $E^{-1}(c)$ »Mannigfaltigkeiten«, d. h. gekrümmte Hyperflächen (diese behandeln wir später), nicht einfach der platte \mathbb{R}^{n-1} . Daher sollte man Differentialgleichungen nicht nur im \mathbb{R}^n , sondern allgemeiner auf Mannigfaltigkeiten untersuchen.

Damit kommen wir zur schwierigsten Frage:

Wie findet man erste Integrale, zu gegebenen V ?

Eine allgemeine Antwort gibt es nicht (sonst wären alle Differentialgleichungen leicht zu lösen).

Wir stellen zwei Situationen vor, wo man erste Integrale finden kann.

- (1) Separation der Variablen liefert (wenn anwendbar) ein erstes Integral:

Wir erinnern uns: Um eine Differentialgleichung der Form

$$y' = a(x)b(y)$$

zu lösen, finde Stammfunktionen

$$A(x) = \int a(x)dx \quad B(y) = \int \frac{1}{b(y)}dy$$

In Satz 3.2.1 sahen wir, dass dann $B(y) = A(x) + c$ eine implizite Lösung ist, für jedes $c \in \mathbb{R}$. Dies bedeutete: Wenn man diese Gleichung nach $y = y(x)$ auflösen kann, so ist $y(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung. Neue Sichtweise:

Erinnerung (Satz 2.2.3): Lösen von $y' = a(x)b(y) \Leftrightarrow$ Finden der Orbits von $V(x, y) = (1, a(x)b(y))$.

Es gilt: $E(x, y) = A(x) - B(y)$ ist erstes Integral von V .

Denn $V_1 = 1, V_2 = a(x)b(y) \Rightarrow DE(V) = a(x) \cdot 1 + \left(-\frac{1}{b(y)}\right)a(x)b(y) = 0$.

Man sagt auch: E ist erstes Integral von $y' = a(x)b(y)$.

- (2) Beschreibt die Differentialgleichung einen physikalischen Vorgang, so liefert jede sogenannte *Erhaltungsgröße* ein erstes Integral. Zum Beispiel sagt der Satz von der Erhaltung der Energie, dass die Gesamtenergie eines Systems erhalten bleibt. Die Gesamtenergie ist also eine Erhaltungsgröße. Weitere Erhaltungsgrößen sind Impuls und Drehimpuls.

Beispiel: Bewegung eines Teilchens in einem Kraftfeld.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ ein Vektorfeld. Wirkt auf ein Teilchen am Ort $x \in \Omega$ die Kraft $F(x)$, so bewegt sich das Teilchen auf einer Kurve $t \mapsto x(t)$, die folgender Differentialgleichung genügt (nach dem Newtonschen Gesetz):

$$\underbrace{m}_{\text{Masse}} \cdot \underbrace{x''}_{\text{Beschleunigung}} = \underbrace{F(x)}_{\text{Kraft}}$$

Dies ist ein System von n Gleichungen zweiter Ordnung. Es ist im Allgemeinen nicht-linear, wenn F nicht zufällig linear ist. Also schwierig. Ein typischer Fall ist $F(x) = -c \frac{x}{\|x\|^3}$, das Gravitationsfeld.

Wir betrachten nur $d = 1$, also eine nicht-lineare Gleichung zweiter Ordnung (Teilchen bewegen sich auf einer eindimensionalen Bahn). Erstaunlicherweise lässt sich diese lösen! Wir übersetzen sie erst in ein System erster Ordnung (der Einfachheit halber setzen wir $m = 1$):

$$x' = y \quad y' = F(x)$$

Behauptung: Sei U eine Stammfunktion für $-F$. Dann ist $E(x, y) = \frac{y^2}{2} + U(x)$ erstes Integral.

$$\text{Denn } \frac{\partial E}{\partial x} y + \frac{\partial E}{\partial y} F(x) = \underbrace{U'(x)}_{-F(x)} y + y F(x) = 0.$$

Wie kommt man auf E ? Mit Physikkenntnis: $y^2/2$ ist die kinetische Energie (da $y = x'$ die Geschwindigkeit ist) und $U(x)$ die potentielle Energie. Deren Summe ist die Gesamtenergie des Teilchens, also konstant!

Damit kann man die Orbits mittels der Niveaulinien von E bestimmen.

Beispiel (Schaukel): Löse $x'' = -\sin x$. Mit $y = x'$ und $U(x) = -\cos x$ ist $E(x, y) = \frac{y^2}{2} - \cos x$ ein erstes Integral.

Bemerkung:

- ▷ **Wichtig:** Obwohl das Teilchen sich auf einer 1-dimensionalen Bahn bewegt, ist das System 2-dimensional! Das hat folgende Konsequenzen:
 1. Nicht die Integralkurven von F sind von Bedeutung, sondern die von $V(x, y) = (y, F(x))$.
 2. Eine Lösung ist nicht durch Angabe von $x(0)$ bestimmt, sondern durch Angabe von $x(0)$ und $x'(0)$.
 3. Verschiedene Lösungen $t \mapsto x(t)$ können (und werden) sich kreuzen. Was sich nicht kreuzt, sind die Kurven $t \mapsto (x(t), x'(t))$. Verschiedene Lösungen entsprechen verschiedenen »Bewegungsarten« des Teilchens. Zum Beispiel kann es im Punkt $x(0) = p$ schnell oder langsam losfliegen.
- ▷ $E(x, x') = (x')^2/2 + U(x)$ ist ein erstes Integral für die Gleichung $x'' = F(x)$. Das heißt, falls $x(t)$ eine Lösung der Gleichung ist, so ist $t \mapsto E(x(t), x'(t))$ konstant.
- ▷ Für $d > 1$ lässt sich ein erstes Integral angeben, falls F ein Gradientenfeld ist, d. h., falls eine Funktion $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ existiert mit $F = -\nabla U$. Dann ist $E(x, x') = \|x'\|^2/2 + U(x)$ ein erstes Integral. Nicht alle Vektorfelder sind Gradientenfelder, viele der in der Physik vorkommenden Kraftfelder aber schon.
- ▷ Durch eine weitere Integration kann man aus den Orbits sogar die Integralkurven bestimmen.

Damit ist das Thema Differentialgleichungen in dieser Vorlesung abgeschlossen. Einen Überblick finden Sie am Ende des Skripts.

6.4 Der Gradient

Von jetzt an betrachten wir immer Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, wobei U eine offene Teilmenge eines normierten Vektorraumes V ist. Siehe die Bemerkungen am Ende von Abschnitt 6.2. In diesem Abschnitt sei $\dim V < \infty$. Wer will, kann sich immer $V = \mathbb{R}^n$ vorstellen.

6.4.1 Definition

Angenommen, die Norm auf V ist durch ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gegeben, also $\|h\| = \sqrt{\langle h, h \rangle}$. Ist f wie oben und in a differenzierbar, so sei der **Gradient** von f an der Stelle a — **grad** $f(a) = \nabla f(a)$ — der Vektor in V , für den gilt:

$$Df|_a(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle \quad \text{für alle } h \in V$$

Bemerkung: Warum existiert ein Vektor mit dieser Eigenschaft? Es gilt: Für jede Linearform L auf V existiert ein $v \in V$ mit

$$L(h) = \langle v, h \rangle \quad \text{für alle } h \in V$$

Beweis: Man wähle eine Orthonormalbasis e_1, \dots, e_n und setze $v = \sum_{i=1}^n L(e_i)e_i$. (Umgekehrt ist natürlich $h \mapsto \langle v, h \rangle$ eine Linearform auf V für jedes $v \in V$.)

Für $V = \mathbb{R}^n$ werden wir immer das Standardskalarprodukt $\langle v, h \rangle = \sum_{i=1}^n v_i h_i$ verwenden. Dann ergibt sich:

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Nochmals nachgerechnet:

$$Df|_a(h) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}, h \right\rangle$$

Offensichtlich ist also im reellen Fall der Gradient von f bei a gleich dem Transponierten der Jakobimatrix von f bei a .

Schreibweise: Vektoren in \mathbb{R}^n werden in Spaltenform dargestellt, Linearformen in Zeilenform. Dadurch wird der gesamte Formalismus für reelle lineare Abbildungen aus der linearen Algebra auch hier zugänglich, da so die Anwendung einer linearen Abbildung (hier: das Differential) auf einen Vektor das gleiche Ergebnis liefert wie die Multiplikation einer Matrix (hier: Jakobimatrix) mit dem Vektor.

Was ist die geometrische Bedeutung des Gradienten?

6.4.2 Satz

(a) $\|\nabla f(a)\| = \max \{ \partial_h f(a) : h \in V, \|h\| = 1 \}$

(b) Das Maximum in (a) wird (falls $\nabla f(a) \neq 0$) für genau ein h angenommen. Dieses ist

$$\frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|} = h$$

In Worten: $\nabla f(a)$ hat die Richtung des schnellsten Anwachsens von $f(x)$, wenn sich x von a mit Geschwindigkeit(-sbetrag) 1 entfernt (falls $\nabla f(a) \neq 0$), und $\|\nabla f(a)\|$ ist gleich die Änderungsrate von f in dieser Richtung (bei Geschwindigkeit = 1).

Bemerkung: Ein Vektor $v \in V$, $v \neq 0$ ist bestimmt durch:

- ▷ seine Länge $\|v\|$
- ▷ seine Richtung, diese kann mit $\frac{v}{\|v\|}$ identifiziert werden, d. h. dem Einheitsvektor, der parallel und gleichgerichtet zu v ist.

Beweis: Nach Definition und bekannten Sätzen ist

$$\partial_h f(a) = Df|_a(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle \quad \text{für alle } h \in V.$$

Die Cauchy-Schwarz Ungleichung sagt:

$$\langle \nabla f(a), h \rangle \leq \| \nabla f(a) \| \cdot \| h \|$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $\nabla f(a)$ und h parallel und gleichgerichtet sind. Für $\|h\| = 1$ ergibt sich die Behauptung. \square

Eine zentrale geometrische Eigenschaft des Gradienten ist folgende.

Sei wiederum $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset V$ offen, V mit Skalarprodukt, $a \in U$, f in a differenzierbar.

6.4.3 Satz

Sei $c = f(a)$. Dann steht $\nabla f(a)$ senkrecht auf der Niveaumenge $f^{-1}(c)$.

Das heißt: Sei $\gamma : I \rightarrow U$ ($I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $0 \in I$) irgendeine differenzierbare Kurve mit:

- (1) $\gamma(0) = a$
- (2) $\gamma(t) \in f^{-1}(c)$ für alle $t \in I$

Dann gilt: $\nabla f(a) \perp \gamma'(0)$

Beweis: Nach Definition des Gradienten ist $\langle \nabla f(a), \gamma'(0) \rangle = Df|_a(\gamma'(0))$.

Mit der Kettenregel folgt $Df|_a(\gamma'(0)) = \frac{d}{dt}|_{t=0} (f \circ \gamma)(t) = 0$, weil $f(\gamma(t)) = c$ für alle t ist, also konstant. \square

Beispiel: Aufgabe: Finde eine Formel für einen Normalenvektor zu $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^3 = x^2\}$ in einem beliebigen Punkt $(x, y) \in K$.

Lösung: Es ist $K = f^{-1}(0)$, wobei $f(x, y) = x^2 - y^3$.

Dann ist $\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)^T := \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)^T$ (T bedeutet, dass die Matrix transponiert wird).

Nach dem Einsetzen ergibt sich $\nabla f(x, y) = (2x, -3y^2)^T$.

Bei Punkten $(x, y) \neq (0, 0)$ erhält man so einen Normalenvektor zu der Kurve K . Bei $(x, y) = (0, 0)$ hat K eine Spitze, es ist gar nicht klar, was geometrisch eigentlich »Normalenvektor« bedeuten soll. Hier ergibt sich $\nabla f(0, 0) = 0$.

(Die wahre Bedeutung hiervon erfahren wir später: Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt, dass Spitzen nur bei Punkten auftreten können, wo der Gradient verschwindet.)

6.5 Höhere Ableitungen

Bei der Einführung höherer Ableitungen für Funktionen mehrerer Variablen gehen wir umgekehrt vor wie bei der Einführung der ersten Ableitung: Wir fangen mit der konkreten Sichtweise an (partielle Ableitungen) und überlegen dann, was für ein algebraisches Objekt (analog zu der Linearform $Df|_a$) dadurch

repräsentiert wird. Auf diese Weise sieht man leichter die Einfachheit und Komplexität des Begriffs (hoffe ich).

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $i \in \{1, \dots, n\}$. Falls $\partial_i f(a)$ in jedem $a \in U$ existiert, erhält man eine Funktion $\partial_i f : U \rightarrow \mathbb{R}$, die man vielleicht wieder ableiten kann, etwa in der j -Richtung $\rightsquigarrow \partial_j(\partial_i f)$. Hiermit kann man fortfahren, falls die Ableitungen jeweils existieren.

6.5.1 Definition

Für $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\}$ sei die p -te partielle Ableitung in Richtungen x_{i_1}, \dots, x_{i_p} definiert durch

$$\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_p} f := (\partial_{i_1} \cdots (\partial_{i_{p-1}} (\partial_{i_p} f)) \cdots)$$

falls f auf U in Richtung x_{i_p} differenzierbar ist, $\partial_{i_p} f$ auf U in Richtung $x_{i_{p-1}}$ differenzierbar ist etc.

Andere Schreibweisen (etwa für $p = 2$):

$$\partial_j \partial_i f = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} f = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f = f''_{x_j x_i}$$

Manche Autoren schreiben hierfür auch $f''_{x_i x_j}$ (umgedrehte Reihenfolge!), wir werden jedoch gleich sehen, dass dies unter milden Bedingungen an f egal ist. Hierzu ein Beispiel:

Beispiel: Sei $f(x, y) = x \sin y$. Wir leiten nach x ab. Es folgt:

$$f'_x = \sin y$$

Leiten wir dies nach y ab, ergibt sich:

$$f''_{yx} = \cos y$$

Leitet man f'_x nochmals nach x ab, dann erhalten wir:

$$f''_{xx} = 0$$

Ähnlich folgt:

$$f'_y = x \cdot \cos y \quad f''_{xy} = \cos y \quad f''_{yy} = x \cdot (-\sin y)$$

Hier ist also $f''_{xy} = f''_{yx}$.

Dass dies kein Zufall ist, sagt der **Satz von Schwarz**:

6.5.2 Satz (Vertauschen partieller Ableitungen)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in U$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Angenommen $\partial_i f$, $\partial_j f$, $\partial_i \partial_j f$ existieren und sind stetig in einer Umgebung von a .

Dann existiert auch $\partial_j \partial_i f(a)$, und $\partial_i \partial_j f(a) = \partial_j \partial_i f(a)$.

Vorstellung? $\partial_1 f$ ist die Steigung \rightarrow , und $\partial_2 f$ ist die Steigung \uparrow . Dann ist $\partial_1(\partial_2 f)$ die Änderung der Vertikalsteigung beim \rightarrow -Gehen, und $\partial_2(\partial_1 f)$ die Änderung der horizontalen Steigung beim \uparrow -Gehen. Haben Sie dafür eine gute anschauliche Erklärung? Dann teilen Sie mir diese bitte mit!

Beweis: Sei o. B. d. A. $n = 2$, $i = 1$, $j = 2$.

$$\begin{aligned} \partial_2(\partial_1 f)(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\partial_1 f)(0, h) - (\partial_1 f)(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(k, h) - f(0, h)}{k} - \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(k, 0) - f(0, 0)}{k} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{h \cdot k} [f(k, h) - f(0, h) - f(k, 0) + f(0, 0)] \end{aligned}$$

Sei zunächst k und h fest. Nun verwendet man den Mittelwertsatz für

$$g_k(y) := f(k, y) - f(0, y).$$

Dann $[f(k, h) - f(0, h) - f(k, 0) + f(0, 0)] = g_k(h) - g_k(0) = h \cdot g'_k(\eta)$

für ein η zwischen $0, h$. Weiter: $g'_k(\eta) = \partial_2 f(k, \eta) - \partial_2 f(0, \eta)$

Setze $r(x) = \partial_2 f(x, \eta)$. Man verwendet erneut den Mittelwertsatz:

$$r(k) - r(0) = kr'(\xi) = k\partial_1(\partial_2 f)(\xi, \eta)$$

für ein ξ zwischen $0, k$.

Also: $\forall k, h \exists \xi, \eta$ (ξ zwischen $0, k$ und η zwischen $0, h$) mit

$$[f(k, h) - f(0, h) - f(k, 0) + f(0, 0)] = h \cdot k \cdot \partial_1(\partial_2 f)(\xi, \eta)$$

Da $\partial_1 \partial_2 f$ stetig ist und $\xi, \eta \rightarrow 0$ für $k, h \rightarrow 0$ gilt, folgt:

$$\partial_2(\partial_1 f)(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \partial_1(\partial_2 f)(\xi, \eta) = \partial_1(\partial_2 f)(0, 0)$$

□

6.5.3 Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir $C^k(\mathbf{U}) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} : \text{Alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung } k \text{ von } f \text{ existieren und sind stetig}\}$.

(Der Raum der k -mal stetig differenzierbaren Funktionen.)

Natürlich könnte man auch Funktionen betrachten, für die zum Beispiel die zweiten Ableitungen existieren, aber nicht notwendig stetig sind, doch so etwas kommt selten vor.

Bemerkung: Aus dem Satz von Schwarz folgt leicht mittels Induktion, dass für $f \in C^k(U)$ die Reihenfolge aller höchstens k -ten partiellen Ableitungen beliebig vertauscht werden kann, d. h.: Für jedes $l \leq k$, jede Permutation π von $\{1, \dots, l\}$ und alle $i_1 \dots i_l$ gilt

$$\partial_{i_1} \dots \partial_{i_l} f = \partial_{\pi(i_1)} \dots \partial_{\pi(i_l)} f$$

Für eine C^k Funktion von n Variablen gibt es also eine unübersichtliche Vielfalt an k -ten Ableitungen:

- 1. Ableitung: n Funktionen
- 2. Ableitung: n^2 Funktionen ($\partial_j \partial_i f$ für $i, j = 1, \dots, n$).
- ⋮
- k -te Ableitung: n^k Funktionen ($\partial_{i_1} f, \dots, \partial_{i_k} f$ für $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$)

Dabei sind nach dem Satz von Schwarz viele dieser Funktionen gleich, z. B. bestimmen wegen $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$ für alle i, j schon $\frac{n(n+1)}{2}$ Funktionen alle möglichen zweiten Ableitungen.

Wie organisiert man diesen Wust an Information? Gibt es ein Objekt (ähnlich dem Differential), das alle diese partiellen Ableitungen in sich vereint?

Um dies zu beantworten, wollen wir nun die anderen Sichtweisen der ersten Ableitung auf höhere Ableitungen übertragen. Zunächst die Richtungsableitung. Hier nimmt man einfach mehrere Richtungsableitungen hintereinander (wir verwenden wieder obere Indizes zur Aufzählung mehrerer Vektoren):

6.5.4 Lemma

Sei $f \in C^k(U)$. Dann existiert für beliebige $h^{(1)}, \dots, h^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ die iterierte Richtungsableitung $\partial_{h^{(k)}} \dots \partial_{h^{(1)}} f := (\partial_{h^{(k)}} \dots (\partial_{h^{(2)}} (\partial_{h^{(1)}} f)) \dots)$ auf U , und es gilt

$$\partial_{h^{(k)}} \dots \partial_{h^{(1)}} f = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n (\partial_{i_k} \dots \partial_{i_1} f) h_{i_1}^{(1)} \dots h_{i_k}^{(k)},$$

wobei $h^{(l)} = (h_1^{(l)}, \dots, h_n^{(l)})^T$ für $l = 1, \dots, k$.

Beweis: Zunächst ist $\partial_{h^{(1)}}f = \sum_{i_1=1}^n (\partial_{i_1}f) \cdot h_{i_1}^{(1)}$. Das ist der Fall $k = 1$. Wendet man hierauf $\partial_{h^{(2)}}$ an, so folgt, da die $h_i^{(1)}$ Konstanten sind:

$$\partial_{h^{(2)}}(\partial_{h^{(1)}}f) = \sum_{i_1=1}^n \partial_{h^{(2)}}(\partial_{i_1}f)h_{i_1}^{(1)} = \sum_{i_1, i_2=1}^n (\partial_{i_2}\partial_{i_1}f) \cdot h_{i_1}^{(1)}h_{i_2}^{(2)}$$

Dies ist der Fall $k = 2$. Und so weiter per Induktion. \square

Bemerkung (zu höheren Ableitungen für Funktionen auf Vektorräumen): Offensichtlich gilt auch: Existiert $\partial_{h^{(k)}} \dots \partial_{h^{(1)}}f$ für beliebige $h^{(1)}, \dots, h^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ auf U und ist dort stetig, so folgt $f \in C^k(U)$. Denn die partiellen Ableitungen sind ja spezielle Richtungsableitungen.

Damit lässt sich $C^k(U)$ auch für offene Teilmengen in beliebigen normierten, endlich-dimensionalen Vektorräumen V definieren, nämlich als die Menge der Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, für die $\partial_{h^{(k)}} \dots \partial_{h^{(1)}}f$ für beliebige $h^{(1)}, \dots, h^{(k)} \in V$ auf U existiert und stetig ist.

(Man könnte $C^k(U)$ für $U \subset V$ auch mittels Wahl einer Basis von V – und damit Identifizierung von V mit \mathbb{R}^n – definieren, müsste dann aber die Unabhängigkeit von der Wahl der Basis zeigen. Dies liefe im Wesentlichen auf den Beweis von Lemma 6.5.4 hinaus.)

Im Folgenden sei V ein endlich-dimensionaler normierter Vektorraum, $U \subset V$ offen und $k \in \mathbb{N}$. Wir können nun als Verallgemeinerung des Differentials auf höhere Ableitungen formulieren:

6.5.5 Definition

Sei $f \in C^k(U)$ und $a \in U$. Dann definieren wir für $h^{(1)}, \dots, h^{(k)} \in V$

$$D^{(k)}f|_a(h^{(1)}, \dots, h^{(k)}) := \partial_{h^{(1)}} \dots \partial_{h^{(k)}}f(a)$$

Die Abbildung $D^{(k)}f|_a : V^k \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Differential k -ter Ordnung** von f im Punkt a .

Was ist $D^{(k)}f|_a$ für ein algebraisches Objekt, das heißt, was sind seine wesentlichen algebraischen Eigenschaften? Es sind die folgenden.

6.5.6 Definition

Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum und $k \in \mathbb{N}$. Eine Funktion $\alpha : V^k \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **k -Multilinearform** auf V , falls α bezüglich jedem seiner Argumente linear ist. Das heißt:

Für jedes $i = 1, \dots, k$ gilt: Für alle $v^{(1)}, \dots, v^{(k)}, w^{(i)} \in V$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \alpha(v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(i)}, \dots, v^{(k)}) + \alpha(v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, w^{(i)}, \dots, v^{(k)}) &= \alpha(v^{(1)}, \dots, v^{(i)} + w^{(i)}, \dots, v^{(k)}) \\ \text{und } \alpha(v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, cv^{(i)}, \dots, v^{(k)}) &= c \alpha(v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(i)}, \dots, v^{(k)}) \end{aligned}$$

α heißt **symmetrisch**, falls für alle Permutationen π von $(1, \dots, k)$ gilt:

$$\alpha(v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(k)}) = \alpha(v^{(\pi(1))}, \dots, v^{(\pi(k))})$$

2-Multilinearformen heißen auch **Bilinearformen**.

Bemerkung: Eine 1-Multilinearform auf V ist offenbar dasselbe wie eine Linearform auf V . Für $k \geq 2$ sind aber k -Multilinearformen nicht mit linearen Abbildungen $V^k \rightarrow \mathbb{R}$ zu verwechseln! Zum Beispiel ist das Skalarprodukt auf \mathbb{R}^2 $(v, w) = v_1w_1 + v_2w_2$ eine Bilinearform auf \mathbb{R}^2 . Da aber Komponenten von v mit Komponenten von w multipliziert werden, ist es nicht linear bzgl. des Gesamtvektors (v_1, v_2, w_1, w_2) , also nicht linear auf $(\mathbb{R}^2)^2$. Verdoppelt man etwa diesen Vektor, so vervierfacht sich (v, w) .

Wie sehen k -Multilinearformen konkret aus?

6.5.7 Lemma

Sei α eine k -Multilinearform auf dem Vektorraum V . Sei $e^{(1)}, \dots, e^{(n)}$ eine Basis von V .

Für beliebige $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ setze $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} := \alpha(e^{(i_1)}, \dots, e^{(i_k)})$.

Seien $v^{(1)}, \dots, v^{(k)} \in V$ beliebige Vektoren und $v^{(l)} = \sum_{i=1}^n v_i^{(l)} e^{(i)}$, $l = 1, \dots, k$, ihre Darstellungen

bezüglich der Basis $e^{(1)}, \dots, e^{(n)}$. Dann ist

$$\alpha(v^{(1)}, \dots, v^{(k)}) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} v_{i_1}^{(1)} \dots v_{i_k}^{(k)}$$

Beweis: Man setzt die Basis-Darstellung ein und »multipliziert aus«, d.h. verwendet die Linearität, erst für das erste Argument, dann für das zweite etc. □

Man kann sich die Zahlen $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_k}$ als Elemente eines k -dimensionalen Zahlenwürfels der Kantenlänge n vorstellen. Für $k = 2$ wäre das eine quadratische Matrix.

Wir fassen zusammen:

6.5.8 Satz

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, $U \subset V$ offen und $f \in C^k(U)$. Sei $a \in U$. Das **Differential k -ter Ordnung** von f im Punkt a ist eine symmetrische k -Multilinearform $D^{(k)}f|_a$ auf V . Bezüglich einer Basis $e^{(1)}, \dots, e^{(n)}$ von V ist sie gegeben durch

$$Df^{(k)}f|_a(h^{(1)}, \dots, h^{(k)}) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n (\partial_{i_k} \dots \partial_{i_1} f) h_{i_1}^{(1)} \dots h_{i_k}^{(k)},$$

wobei $\partial_{i_k} \dots \partial_{i_1} f$ die partiellen Ableitungen von f bezüglich der Basis sind.

Beweis: Die Definition war

$$D^{(k)}f|_a(h^{(1)}, \dots, h^{(k)}) := \partial_{h^{(1)}} \dots \partial_{h^{(k)}} f(a),$$

und dies ist nach Lemma 6.5.4 durch diese Formel gegeben. Aus dem Satz von Schwarz folgt, dass die partiellen Ableitungen nicht von der Reihenfolge der Indizes abhängen, und daraus, dass $D^{(k)}f|_a$ symmetrisch ist. □

Das Differential zweiter Ordnung ist recht übersichtlich: Jede Bilinearform α lässt sich bezüglich einer gegebenen Basis $(e^{(1)}, \dots, e^{(n)})$ als Matrix darstellen:

$$\alpha(v, w) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} v_i w_j = v^T A w, \quad A = (\alpha_{ij})_{i,j=1, \dots, n}$$

falls $v, w \in V$ mit $v = \sum_i v_i e^{(i)}$, $w = \sum_i w_i e^{(i)}$ und außerdem $\alpha_{ij} = \alpha(e^{(i)}, e^{(j)})$.

6.5.9 Definition

Sei $V = \mathbb{R}^n$ und $f \in C^2(U)$. Dann heißt die symmetrische Matrix

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} f''_{11}(a) & \dots & f''_{1n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ f''_{n1}(a) & \dots & f''_{nn}(a) \end{pmatrix}$$

Hesse-Matrix von f im Punkt a .

Der Zusammenhang zwischen Hesse-Matrix und Differential zweiter Ordnung lautet also

$$D^{(2)}f|_a(v, w) = v^T H_f(a) w = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} v_i w_j,$$

wobei v, w als Spaltenvektoren zu verstehen sind und v^T der entsprechende Zeilenvektor ist.

Wir werden sehen, dass die Hesse-Matrix bei der Extremwertbestimmung eine wesentliche Rolle spielt.

Der Satz von Taylor

Aus Analysis I kennen wir die Taylorformel für Funktionen einer Variablen: Sei $U \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \in C^{k+1}(U)$. Seien $a \in U$, $h \in \mathbb{R}$. Falls auch $a + h$ in U liegt, so gilt

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^p}{p!} f^{(p)}(a) + R_{p+1},$$

wobei $R_{p+1} = \frac{h^{(p+1)}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(\xi)$ für ein ξ zwischen a und $a + h$.

Wie könnte eine n -dimensionale Taylorformel aussehen? Sei also $U \subset V$ (stellen Sie sich immer $V = \mathbb{R}^n$ vor, wenn Sie wollen) offen, $f \in C^{k+1}(U)$, $a \in U$. Wie kann man $f(a + h)$ mittels des Wertes von f und seiner Ableitungen bei a approximieren?

Mit folgendem hübschen Trick lässt sich dies leicht beantworten: Setze $\varphi(t) := f(a + th)$ für $t \in [0, 1]$. Dann ist $\varphi(0) = f(a)$, $\varphi(1) = f(a + h)$. Es könnte also hilfreich sein, die Taylorformel für φ beim Punkt 1, bezüglich des Punktes 0, zu verwenden:

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2!} \varphi''(0) + \dots + \frac{1}{p!} \varphi^{(p)}(0) + R_{p+1}$$

mit $R_{p+1} = \frac{1}{(p+1)!} \varphi^{(p+1)}(\tau)$ für ein $0 < \tau < 1$.

Die Ableitungen von φ lassen sich mittels f ausdrücken: Nach Kettenregel und Definition der Richtungsableitung folgt mit $\frac{d}{dt}(a + th) = h$ sukzessive

$$\varphi(t) = f(a + th)$$

$$\varphi'(t) = Df|_{a+th}(h) = \partial_h f(a + th), \text{ und analog}$$

$$\varphi''(t) = \partial_h(\partial_h f)(a + th)$$

$$\vdots$$

$$\text{allgemein: } \varphi^{(l)}(t) = \underbrace{\partial_h \partial_h \dots \partial_h}_{l\text{-mal}} f(a + th).$$

Verwenden wir die oben eingeführte Schreibweise für die iterierten Richtungsableitungen, folgt:

6.5.10 Satz (Satz von Taylor)

Sei V endlich-dimensionaler normierter Vektorraum und $U \subset V$ offen. Sei $f \in C^{k+1}(U)$ und $a \in U$. Angenommen, die Strecke $\{a + th : t \in [0, 1]\}$ liegt in U . Dann gilt

$$f(a + h) = f(a) + Df|_a(h) + \frac{1}{2!} D^2 f|_a(h, h) + \dots + \frac{1}{k!} D^{(k)} f|_a(h, h, \dots, h) + R_{k+1}$$

mit $R_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!} D^{(k+1)} f|_{a+\tau h}(h, \dots, h)$ für ein $\tau \in (0, 1)$.

Man nennt $T_k(h) = f(a) + Df|_a(h) + \frac{1}{2!} D^2 f|_a(h, h) + \dots + \frac{1}{k!} D^{(k)} f|_a(h, h, \dots, h)$ das **k -te Taylorpolynom** von f im Punkt a .

Dies ist wirklich ein Polynom bezüglich der Variablen h (nicht bezüglich a). Zur Definition von Polynomen in n Variablen siehe 1.4.7. Zum Beispiel ist für $k = 2$:

$$T_2(h) = f(a) + \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(a)h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f''_{x_i x_j}(a)h_i h_j$$

Beispiel: Für $f(x_1, x_2) = e^{x_1+x_2}$ und $a = (0, 0)$ ist $T_2(h) = 1 + h_1 + h_2 + \frac{1}{2}(h_1^2 + 2h_1h_2 + h_2^2)$.

Die Bedeutung des Taylorpolynoms liegt wie beim eindimensionalen Fall in folgendem:

- ▷ Approximative Bestimmung des Funktionswertes $f(a+h)$ mittels des Wertes von f und seiner Ableitungen bei a , für kleine h .
- ▷ Untersuchung qualitativer Eigenschaften von f nahe einem Punkt a :
 - Untersuche die Eigenschaft zunächst für T_k .
 - Zeige, dass der Restterm R_{k+1} für die untersuchte Eigenschaft irrelevant ist.

Was hierbei k ist, hängt von der untersuchten Eigenschaft ab.

Wir werden dies nun für die Eigenschaft, bei a ein relatives Maximum oder Minimum zu haben, durchführen.

Extremwertbestimmung

Aus der Analysis I wissen wir, dass bei einem lokalen Minimum a einer Funktion f im Innern ihres Definitionsbereichs $f'(a) = 0$, $f''(a) \geq 0$ ist. Gilt die etwas stärkere Bedingung $f'(a) = 0$, $f''(a) > 0$, so kann man umgekehrt die Existenz eines relativen Minimums folgern. Dies wollen wir nun verallgemeinern.

Den Fall $f''(a) = 0$, wo man manchmal durch Betrachtung höherer Ableitungen entscheiden kann, ob ein lokales Extremum vorliegt, werden wir in höheren Dimensionen nicht betrachten.

Im \mathbb{R}^n ist die zweite Ableitung eine Bilinearform. Was bedeutet Positivität für diese?

6.5.11 Definition

Sei V ein Vektorraum und $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform.

B heißt **positiv definit** $\Leftrightarrow B(v, v) > 0$ für alle $v \neq 0$, $v \in V$.

B heißt **positiv semi-definit** $\Leftrightarrow B(v, v) \geq 0$ für alle $v \in V$.

Wird B bezüglich einer Basis durch eine Matrix A dargestellt, so ist positiv (semi-)Definitheit von B offenbar äquivalent zu positiv (semi-)Definitheit von A , das heißt zu $v^T A v > 0$ (bzw. ≥ 0) für alle $v \neq 0$. Die Funktion $q(v) = B(v, v)$ bzw. $q(v) = v^T A v$ nennt man die zu B bzw. A gehörige **quadratische Form**. Nach der Definition ist positiv (semi-)Definitheit schon eine Eigenschaft von q .

Analog heißt B **negativ (semi-)definit**, falls $-B$ positiv (semi-)definit ist, oder gleichbedeutend, dass $B(v, v) < 0$ (bzw. ≤ 0) für alle $v \neq 0$ ist. B heißt **indefinit**, falls B weder positiv noch negativ semi-definit ist, oder gleichbedeutend, falls es ein v mit $B(v, v) > 0$ und ein w mit $B(w, w) < 0$ gibt.

Beispiel: Den symmetrischen Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

entsprechen die Bilinearformen

$$B_1(h, k) = h_1 k_1 + h_2 k_2$$

$$B_2(h, k) = h_1 k_1 - h_2 k_2$$

$$B_3(h, k) = -h_1 k_1 - h_2 k_2$$

und die quadratischen Formen

$$q_1(h) = h_1^2 + h_2^2$$

$$q_2(h) = h_1^2 - h_2^2$$

$$q_3(h) = -h_1^2 - h_2^2$$

A_1 (bzw. B_1, q_1) ist positiv definit, A_2 ist indefinit, A_3 ist negativ definit.

q_1 hat in 0 ein Minimum, q_2 einen Sattelpunkt (kein lokales Extremum), q_3 ein Maximum.

Das hat Methode:

6.5.12 Satz

Sei $U \subset V$ offen, $a \in U$ und $f \in C^2(U)$. Dann gilt:

(1) Falls f in $a \in U$ ein lokales Extremum hat, so ist $Df|_a = 0$.

(2) Falls f in $a \in U$ ein lokales Minimum hat, so ist $D^{(2)}f|_a$ positiv semi-definit.

(3) Falls $Df|_a = 0$ und $D^{(2)}f|_a$ positiv definit ist, so ist a ein lokales Minimum.

Analoge Aussagen gelten für lokale Maxima, wenn man ›positiv‹ durch ›negativ‹ ersetzt.

Falls $Df|_a = 0$ und $D^{(2)}f|_a$ indefinit ist, hat f in a kein lokales Extremum.

Im konkreten Fall $V = \mathbb{R}^n$ bedeutet (1), dass $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ für alle i , und bei (2), (3) überprüft man die (semi-)Definitheit der Hessematrix $H_f(a)$.

Wie sieht man einer symmetrischen Matrix an, ob sie positiv (semi-)definit, negativ (semi-)definit oder indefinit ist? Das folgende Lemma, das wir auch im Beweis von Satz 6.5.12 verwenden werden, liefert ein vor allem für theoretische Zwecke nützliches Kriterium.

6.5.13 Lemma

Sei A symmetrische $n \times n$ -Matrix. Seien $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ die Eigenwerte von A (mit Multiplizität aufgeschrieben). Dann gilt für alle $h \in \mathbb{R}^n$:

$$\lambda_1 \|h\|^2 \leq h^T A h \leq \lambda_n \|h\|^2$$

wobei $\| \cdot \|$ die euklidische Norm ist. Die linke (bzw. rechte) Ungleichung wird zur Gleichheit, wenn h ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 (bzw. λ_n) ist.

Beweis: Wir verwenden die aus der linearen Algebra bekannte Tatsache, dass es eine Orthonormalbasis $v^{(1)}, \dots, v^{(n)}$ aus Eigenvektoren von A gibt. Sei λ_i der Eigenwert zu $v^{(i)}$. Ist $h \in \mathbb{R}^n$ beliebig, so ist $h = \sum_{i=1}^n \alpha_i v^{(i)}$ für gewisse $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$Ah = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i v^{(i)} \quad (v^{(i)} \text{ Eigenvektoren})$$

$$\|h\|^2 = h^T h = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \quad (v^{(i)} \text{ orthonormal - Pythagoras})$$

$$h^T A h = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2 \quad (\text{verwende erste Gleichung und Orthonormalität})$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt wegen $\lambda_1 \leq \lambda_i \leq \lambda_n$ für alle i die Behauptung. □

Aus dem Lemma folgt unmittelbar:

6.5.14 Satz

Sind A und $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ wie im vorigen Satz, so gilt:

- (a) A positiv definit \Leftrightarrow Alle Eigenwerte sind positiv.
- (b) A positiv semi-definit \Leftrightarrow Alle Eigenwerte sind ≥ 0 .
- (c) A negativ definit \Leftrightarrow Alle Eigenwerte sind negativ.
- (d) A negativ semi-definit \Leftrightarrow Alle Eigenwerte sind ≤ 0 .
- (e) A indefinit \Leftrightarrow Es gibt mind. einen positiven und mind. einen negativen Eigenwert.

Beispiel: Der symmetrischen Matrix $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ entspricht die Bilinearform $B_4(h, k) = h_1k_2 + h_2k_1$ und die quadratische Form $q_4(h) = 2h_1h_2$. B_4 ist indefinit. Zum Beispiel ist $q_4(1, 1) > 0$, $q_4(1, -1) < 0$.

Die Indefinitheit folgt auch daraus, dass die Eigenwerte von A_4 gleich 1 und -1 sind, oder auch daraus, dass $q_4(h) = \tilde{h}_1^2 - \tilde{h}_2^2$ mit $\tilde{h}_1 = (h_1 + h_2)/\sqrt{2}$, $\tilde{h}_2 = (h_1 - h_2)/\sqrt{2}$. Mittels des Koordinatenwechsels $h \mapsto \tilde{h}$ ist also q_4 äquivalent zum Beispiel q_2 oben.

Die Berechnung der Eigenwerte einer Matrix kann recht kompliziert sein. Der folgende Satz liefert ein Kriterium, das praktischer ist. Zunächst eine Definition: Sei $A = (a_{ij} < -i, j = 1, \dots, n)$ eine $n \times n$ -Matrix. Die **Hauptminoren** von A sind die Zahlen

$$A_k = \det(a_{ij})_{i,j=1,\dots,k}, \quad k = 1, \dots, n$$

also die Determinanten der oberen linken quadratischen Teilmatrizen.

6.5.15 Satz (Hurwitz-Kriterium)

Sei A eine symmetrische $n \times n$ -Matrix. Dann gilt:

A ist positiv definit \Leftrightarrow Alle Hauptminoren von A sind positiv.

Beweis: Siehe Bücher über Lineare Algebra. □

Für $n = 2$ sagt der Satz:

A positiv definit \Leftrightarrow Der Eintrag in der linken oberen Ecke ist positiv und $\det A$ ist positiv.

Leider gilt das Hurwitz-Kriterium *nicht* analog für semi-definite Matrizen.

Preisfrage: Wie lautet das Hurwitz-Kriterium für negativ definite Matrizen?

Vorsicht: FALSCH wäre, dass alle Hauptminoren negativ sein müssten.

Richtig: A negativ definit $\Leftrightarrow A_1 < 0, A_2 > 0, A_3 < 0, \dots$

Denn A negativ definit $\Leftrightarrow -A$ positiv definit, und der k -te Hauptminor von $-A$ ist gleich $(-1)^k$ mal dem k -ten Hauptminor von A , da bei der Determinante k Zeilen mit -1 multipliziert werden!

Beweis (von Satz 6.5.12): Zu (1) und (2): Sei $h \in V$ und $\varphi(t) = f(a + th)$. Falls f bei a ein lokales Minimum hat, so hat φ bei $t = 0$ ein lokales Minimum. Somit ist $\varphi'(0) = 0$ und $\varphi''(0) \geq 0$. Wie beim Beweis des Satzes von Taylor gilt $\varphi'(0) = Df|_a(h)$ und $\varphi''(0) = D^{(2)}f|_a(h, h)$. Also ist für alle $h \in V$ $Df|_a(h) = 0$ und $D^{(2)}f|_a(h, h) \geq 0$.

Zu (3): Es ist zu zeigen, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass aus $\|h\| < \varepsilon$ folgt, dass $f(a + h) \geq f(a)$ ist. Nach dem Satz von Taylor mit $k = 2$ ist $f(a + h) \geq f(a)$ äquivalent zu

$$\frac{1}{2}D^2f|_a(h, h) + R_3(h) \geq 0.$$

Wie zeigt man dies? Wir erinnern uns an das Prinzip, dass die gewünschte qualitative Eigenschaft von f erst für das Taylorpolynom gezeigt werden sollte und dann gezeigt werden sollte, dass der Restterm sie nicht zerstört, das heißt hier: $R_3(h)$ kann nicht allzu negativ sein. Warum sollte das stimmen? Beachte, dass $\frac{1}{2}D^2f|_a(h, h)$ quadratisch in h ist, aber $R_3(h)$ kubisch. Für kleine h dominiert ein quadratischer Term einen kubischen! Wir werden also zeigen:

- (a) Es gibt ein $c > 0$, so dass $\frac{1}{2}D^2f|_a(h, h) \geq c\|h\|^2$ für alle h .
- (b) Es gibt ein $C > 0$, so dass $|R_3(h)| \leq C\|h\|^3$ für alle h mit $\|h\| \leq \varepsilon_0$. Hierbei sei ε_0 so gewählt, dass $\bar{K}_{\varepsilon_0}(a) \subset U$.

Beweis von (a): Sei A die Matrix von $D^2f|_a$ bezüglich irgendeiner Basis, und sei λ_1 der kleinste Eigenwert von A . Nach Lemma 6.5.13 ist $\lambda_1 > 0$ und $D^2f|_a(h, h) \geq \lambda_1\|h\|^2$. Setze $c = \lambda_1/2$.

Beweis von (b): Es ist $R_3(h) = \frac{1}{3!}D^{(3)}f|_{a+\tau h}(h, h, h)$ für ein $\tau \in (0, 1)$. Betrachte die Funktion

$$F(b, \omega) = \frac{1}{6}D^{(3)}f|_b(\omega, \omega, \omega) \quad \text{für } b \in \bar{K}_{\varepsilon_0}(a), \|\omega\| = 1.$$

Da die Menge der (b, ω) kompakt ist (offenbar beschränkt, und abgeschlossen, da durch $=, \leq$ stetiger Funktionen – nämlich der Distanzfunktion – definiert), hat $|F|$ auf dieser Menge ein Maximum C . Aus $R_3(h) = \frac{1}{3!}D^3f|_{a+\tau h}(h, h, h) = \|h\|^3F(b, \omega)$ folgt nun die Behauptung.

Beweis, dass aus (a) und (b) Teil (3) des Satzes folgt: Für $\|h\| < c/C$ ist

$$\frac{1}{2}D^2f|_a(h, h) + R_3(h) \geq c\|h\|^2 - C\|h\|^3 = C\|h\|^2\left(\frac{c}{C} - \|h\|\right) \geq 0.$$

Die letzte Behauptung des Satzes ergibt sich sofort aus (1) und (2): Läge ein lokales Extremum vor, so wäre $D^{(2)}f|_a$ semi-definit, also nicht indefinit. \square

Verfahren (zur Extremwertbestimmung): Um die lokalen Extrema einer Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ zu bestimmen, geht man also folgendermaßen vor:

- (1) Bestimme alle Punkte a mit $Df|_a = 0$, d.h. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ für alle i . Diese Punkte heißen **kritische Punkte** von f .
- (2) Für jeden kritischen Punkt a berechne die Hesse-Matrix $H_f(a)$. Ist sie positiv definit, hat man ein Minimum, ist sie negativ definit, hat man ein Maximum. Ist sie indefinit, spricht man auch von einem **Sattelpunkt**. Falls sie semi-definit ist, kann man ohne weiteres keine Aussage machen.

Beachte, dass wir hier nur die lokalen Extrema in der offenen Menge U behandeln. Randextrema erfordern weitere Überlegungen.

Beispiele:

- (1) Sei $f(x, y) = x^2 + y^2$. Dann ist $Df(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ und $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. $Df(x, y) = 0$ gilt genau für $x = y = 0$, und $H_f(0, 0)$ ist positiv definit, also ist $(0, 0)$ ein lokales Minimum. Offenbar ist es sogar ein globales Minimum.
- (2) Sei $f(x, y) = \cos x + \cos y$. Dann $\partial_x f = -\sin x$, $\partial_y f = -\sin y$. Die kritischen Punkte sind also genau die Punkte (x, y) mit $\sin x = \sin y = 0$. Dies sind genau die Punkte $p_{k,l} = (k\pi, l\pi)$ mit $k, l \in \mathbb{Z}$. Die Hesse-Matrix ist $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -\cos x & 0 \\ 0 & -\cos y \end{pmatrix}$, und bei $p_{k,l}$ ist dies gleich $\begin{pmatrix} (-1)^{k+1} & 0 \\ 0 & (-1)^{l+1} \end{pmatrix}$

Wir erhalten also:

- ▷ Bei allen $p_{k,l}$ mit k, l gerade liegen lokale Maxima.
- ▷ Bei allen $p_{k,l}$ mit k, l ungerade liegen lokale Minima.
- ▷ Bei allen anderen $p_{k,l}$ liegen Sattelpunkte.

6.6 Vertauschen von Differentiation und Integration

Darf man Ableiten und Integrieren bezüglich verschiedener Variablen vertauschen? Das heißt, stimmt folgendes?

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(x, t) dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt$$

Die Antwort, wie so oft, ist: Ja, meistens. Also unter gewissen Bedingungen an f , die in den meisten interessanten Fällen erfüllt sind. (Es gibt auch Beispiele, wo es nicht stimmt, die sparen wir uns hier aber.)

Hier ist ein Satz, der für die meisten Situationen ausreichen sollte. Insbesondere erlaubt er uneigentliche Integrale, was oft wichtig ist. Zunächst wird auch die Frage geklärt, ob das Integral (bzgl. t) stetig von x abhängt.

6.6.1 Satz

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $b, c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit $b < c$. Sei $f : U \times (b, c) \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto f(x, t)$ stetig.

- (1) Falls $|f(x, t)|$ durch über (b, c) integrierbare Funktionen majorisiert werden kann, lokal gleichmäßig in x , dann ist

$$F(x) = \int_b^c f(x, t) dt$$

stetig auf U .

- (2) Angenommen, $\partial_{x_j} f$ existiert und ist stetig in $U \times (b, c)$. Falls $|\partial_{x_j} f(x, t)|$ durch über (b, c) integrierbare Funktionen majorisiert werden kann, lokal gleichmäßig in x , dann ist

$$\partial_{x_j} \int_b^c f(x, t) dt = \int_b^c \partial_{x_j} f(x, t) dt.$$

Die Majorisierungsbedingung in (1) lautet, ausführlich geschrieben: Zu jedem $x_0 \in U$ existiert eine Umgebung U' und eine stetige Funktion $S : (b, c) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $|f(x, t)| \leq S(t)$ für alle $x \in U'$, $t \in (b, c)$, und $\int_b^c S(t) dt < \infty$.

Die Bedingung in (2) lautet analog.

Beweis: Dies folgt aus einem zentralen Ergebnis der Lebesgue'schen Integrationstheorie, die wir in Analysis III behandeln werden: Dem Satz über die majorisierte Konvergenz. Einen direkten Beweis kann man im Buch Analysis II von E. Behrends finden. \square

Bemerkung: Die Bedingungen klingen zwar kompliziert, sie sind jedoch zum Beispiel dann immer erfüllt, wenn $b, c \in \mathbb{R}$ und f auf $U \times [b, c]$ bezüglich x_j stetig differenzierbar ist. Denn: Wähle die Umgebung U' von x_0 kompakt (etwa eine kleine abgeschlossene Kugel) und setze $S(t) = \max\{|f(x, t)| : x \in U'\}$ (für (1), und ähnlich für (2)). Das Maximum existiert wegen der Kompaktheit und Stetigkeit.

Beispiel:

$$\text{Es ist } \frac{d}{dx} \int_0^1 \sin(x^2 + t^2) dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \sin(x^2 + t^2) dt = \int_0^1 2x \cos(x^2 + t^2) dt = 2x \int_0^1 \cos(x^2 + t^2) dt.$$

Eine hübsche Anwendung ist die Berechnung von $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$:

Eine Stammfunktion für den Integranden gibt es nicht in geschlossener Form (versuchen Sie, eine zu finden!). Erstaunlicherweise lässt sich aber das bestimmte Integral auswerten, zum Beispiel mittels des folgenden Tricks: Wegen Symmetrie ist das gesuchte Integral gleich $2 \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$. Betrachte allgemeiner

$$F(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx} dt \quad \text{für } x \geq 0.$$

$F(x)$ kann man nicht direkt berechnen, wohl aber seine Ableitung! Für $x > 0$ ist

$$F'(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} (-t) e^{-tx} dt = - \int_0^{\infty} \sin t \cdot e^{-tx} dt = \dots = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Das gesuchte Integral $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = F(0)$ könnten wir wegen ($a > 0$ beliebig)

$$F(a) = F(0) + \int_0^a F'(x) dx = F(0) - \int_0^a \frac{1}{1+x^2} dx = F(0) - \arctan a$$

berechnen, wenn wir $F(a)$ für irgendein $a > 0$ kennen würden. Leider ist das nicht der Fall, das ist nicht einfacher als das ursprüngliche Problem. Was uns rettet, ist

$$F(a) \rightarrow 0 \quad \text{für } a \rightarrow \infty.$$

Damit folgt $0 = F(0) - \lim_{a \rightarrow \infty} \arctan a = F(0) - \frac{\pi}{2}$, also $F(0) = \frac{\pi}{2}$ und damit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi$$

Die Details sind eine Übung (deren schwierigster Teil es ist, die Stetigkeit von F bei $a = 0$ nachzuweisen – denn Satz 6.6.1 ist nicht direkt anwendbar, da $|\frac{\sin t}{t}|$ nicht integrierbar ist).

7 Differentiation von Abbildungen

Nun beginnen wir die Diskussion des Ableitungsbegriffs im allgemeinen Fall einer Abbildung

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

mit $n, m \in \mathbb{N}$. Die Fälle $n = 1$ (Kurven) und $m = 1$ (Funktionen) kennen wir bereits.

Neben dem Finden einer vernünftigen Definition und der Anwendung des Ableitungsbegriffs auf konkrete Probleme (Auflösen von Gleichungen, Extremwertbestimmung mit Nebenbedingungen) wird es auch darum gehen, wie man sich solche Abbildungen vorstellen kann. Hier wird die schon bekannte Dualität – rechnerische und geometrische Bedeutung – wieder sehr zentral sein.

Wir werden meistens statt \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m beliebige normierte Vektorräume V, W zulassen. Wenn Sie wollen, können Sie diese in Gedanken immer durch $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ ersetzen. Wir werden aber auch Beispiele sehen, die die abstraktere Sprache rechtfertigen.

Die Sätze und Definitionen gelten in der gegebenen Formulierung für endlich-dimensionale V, W . Bei höheren Anwendungen braucht man aber auch unendlich-dimensionale V, W . Erstaunlicherweise macht das an den meisten Stellen fast keinen Unterschied. Die notwendigen kleinen Modifikationen sind als klein gedruckte Bemerkungen angegeben.

7.1 Definition, einfache Eigenschaften, Beispiele

Die Grundidee der Differentialrechnung ist die lineare Approximation. Das Differential einer Abbildung soll also die Bedeutung einer linearen Approximation haben. Das lässt sich fast wörtlich wie bei Funktionen formulieren.

7.1.1 Definition

Seien V, W normierte Vektorräume, $U \subset V$ sei offen und $a \in U$. Eine Abbildung $f : U \rightarrow W$ heißt in a differenzierbar, falls es eine lineare Abbildung $L : V \rightarrow W$ gibt mit:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in V}} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0$$

In diesem Fall schreibt man: $Df|_a = L$ und nennt dies das **Differential von f bei a** .

Mit $L(V, W) := \{\text{lineare Abbildungen } V \rightarrow W\}$

ist also, falls f auf U differenzierbar ist,

$$Df : U \longrightarrow L(V, W).$$

Bemerkung (zum ∞ -dimensionalen Fall): Der (in diesem Semester) für uns wichtigste Fall ist der endlich-dimensionale, d.h. $\dim V < \infty, \dim W < \infty$. Für viele der folgenden Betrachtungen ist dies jedoch unwesentlich, allerdings muss im Fall $\dim V = \infty$ die Definition um die Forderung ergänzt werden, dass $L : V \rightarrow W$ stetig ist (dies ist für $\dim V < \infty$ automatisch der Fall). $L(V, W)$ ist für beliebige normierte Vektorräume V, W definiert als die Menge der stetigen linearen Abbildungen $V \rightarrow W$.

Bevor wir die Bedeutung des Differentials einer Abbildung untersuchen (die dann erst die Definition rechtfertigt!), leiten wir ein paar einfache Eigenschaften her und betrachten Beispiele.

Wir betrachten zunächst den wichtigsten Fall $W = \mathbb{R}^m$. Eine Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist dann durch ihre m **Komponentenfunktionen** gegeben:

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \text{ für alle } x \in U,$$

wobei jedes f_i eine Funktion $U \rightarrow \mathbb{R}$ ist.

Für Kurven (Satz 2.1.3) ließ sich die Ableitung und Differenzierbarkeit mittels der Komponenten beschreiben. Dies geht auch für Abbildungen:

7.1.2 Satz

$f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ habe die Komponentenfunktionen $f_1, \dots, f_m : U \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $a \in U$. Dann gilt:

f differenzierbar in $a \iff f_1, \dots, f_m$ differenzierbar in a ,

und dann lässt sich für $h \in \mathbb{R}^n$ der Vektor $Df|_a(h) \in \mathbb{R}^m$ komponentenweise berechnen:

$$Df|_a(h) = \begin{pmatrix} Df_1|_a(h) \\ Df_2|_a(h) \\ \vdots \\ Df_m|_a(h) \end{pmatrix}$$

Falls $V = \mathbb{R}^n$, so ist $Df|_a$ bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ durch die Matrix

$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

gegeben.

Die $m \times n$ Matrix J_f heißt **Jacobi-Matrix** von f .

Aus der Formel für J_f folgt auch, dass die Abbildung L in Definition 7.1.1 eindeutig bestimmt ist.

Beweis: Lineare Abbildungen $L : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ sind mittels $L(h) = \begin{pmatrix} L_1(h) \\ \vdots \\ L_m(h) \end{pmatrix}$ durch m -Tupel von Linearformen

$L_i : V \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Dann hat $\frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|}$ die Komponenten $\frac{f_i(a+h) - f_i(a) - L_i(h)}{\|h\|}$, $i = 1, \dots, m$, und wegen Lemma 1.3.10 gilt

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in V}} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0 \iff \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in V}} \frac{f_i(a+h) - f_i(a) - L_i(h)}{\|h\|} = 0 \text{ für } i = 1, \dots, m$$

Daraus folgt die erste Behauptung. Die Formel für die Jacobi-Matrix folgt dann aus Korollar 6.1.5. \square

Um sich bei der Berechnung der Jacobi-Matrix nicht zu vertun, sollte man immer die Komponenten von f übereinander schreiben!

Beispiele:

$$(1) \quad n = m = 2, \quad f(x, y) = \begin{pmatrix} xy \\ x^2 + y \end{pmatrix} \quad J_f(x, y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 1 \end{pmatrix}$$

(2) f affin linear, d. h. $f(x) = Ax + b$, für eine $m \times n$ -Matrix A und ein $b \in \mathbb{R}^m$. Dann ist $J_f(x) = A$ für alle x . Denn:

$$f(x+h) - f(x) - Ah = \underbrace{(A(x+h) + b)}_{Ax+Ah} - (Ax + b) - Ah = 0$$

Ähnlich wie bei Funktionen könnte man auch für Abbildungen von einer Richtungsableitung sprechen. Dies ist eher unüblich. Dieselbe Idee gibt jedoch eine nützliche Berechnungsmethode für das Differential:

7.1.3 Satz

Die Abbildung $f : U \rightarrow W$, $U \subset V$, sei in $a \in U$ differenzierbar. Dann gilt für $h \in V$:

$$Df|_a(h) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(a + th) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t}$$

Beweis: Genau wie der Beweis von Satz 6.1.4. □

Hier ein Beispiel, wo das nützlich ist.

Beispiel: $V = W = M_n(\mathbb{R})$, $f(B) = B^2$. Was ist das Differential von f bei $B \in V$?

Für $H \in V$ ist $(B + tH)^2 = (B + tH)(B + tH) = B^2 + tBH + tHB + t^2H^2$, also

$$\begin{aligned} Df|_B(H) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(B + tH) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (B + tH)^2 \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (B^2 + t(BH + HB) + t^2H^2) \\ &= (0 + (BH + HB) + 2tH^2)\bigg|_{t=0} = BH + HB, \end{aligned}$$

also

$$Df|_B(H) = BH + HB$$

Beachten Sie, dass H, B Matrizen sind, dass dies also nicht notwendig gleich $2BH$ ist!

In diesem Beispiel wäre es nicht sinnvoll, das Differential mittels der Jacobi-Matrix (also der partiellen Ableitungen) anzugeben. Probieren Sie es! Die Rechnung wäre sehr unübersichtlich und gäbe keine Einsicht. Das oben gewonnene Ergebnis werden wir später verwenden, um Wurzeln aus Matrizen zu ziehen.

Die wichtige Kettenregel aus Analysis I hat eine hübsche Verallgemeinerung:

7.1.4 Satz (Kettenregel)

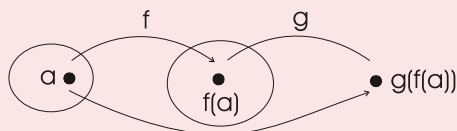
V, W, X seien normierte Vektorräume, $U \subset V$ und $U' \subset W$ offen. Seien $f : U \rightarrow W$, $g : U' \rightarrow X$ Abbildungen, mit $f(U) \subset U'$, so dass $g \circ f : U \rightarrow X$ definiert ist. Sei $a \in U$. Dann gilt:

Falls f in a differenzierbar und g in $f(a)$ differenzierbar ist, dann ist $g \circ f$ in a differenzierbar, und

$$D(g \circ f)|_a = Dg|_{f(a)} \circ Df|_a$$

Falls $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$, $X = \mathbb{R}^k$, so heißt dies:

$$J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \cdot J_f(a)$$



$$D(g \circ f)|_a : V \xrightarrow{Df|_a} W \xrightarrow{Dg|_{f(a)}} X$$

Kurz: Das Differential der Komposition ist die Komposition der Differentiale!

Im Fall $V = W = X = \mathbb{R}$ erhält man die altbekannte Kettenregel aus Analysis I,

$$(g \circ f)(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

In höheren Dimensionen muss man auf der rechten Seite natürlich auf die Reihenfolge der Faktoren achten.

Im Beweis brauchen wir folgendes Konzept (vgl. die Bemerkung vor Satz 5.5.9).

7.1.5 Definition

V, W seien normierte Vektorräume mit Normen $\|\cdot\|_V, \|\cdot\|_W$. Für eine lineare Abbildung $A : V \rightarrow W$ sei die **Abbildungsnorm** definiert durch

$$\|A\|_{L(V,W)} := \sup_{h \in V, h \neq 0} \frac{\|A(h)\|_W}{\|h\|_V}$$

Falls $\dim V < \infty$, so ist $\|A\|_{L(V,W)} < \infty$, und $\|\cdot\|_{L(V,W)}$ definiert eine Norm auf dem Vektorraum der linearen Abbildungen $L(V, W)$ (Beweis als Übung). Direkt aus der Definition folgt

$$\|A(h)\|_W \leq C\|h\|_V \quad \text{für alle } h \in V, \quad \text{mit } C = \|A\|_{L(V,W)}.$$

Wesentlich ist hier, dass C nicht von h abhängt.

Bemerkung (zum ∞ -dimensionalen Fall): Für unendlich-dimensionales V gibt es lineare Abbildungen $A : V \rightarrow W$ mit $\sup_{h \in V, h \neq 0} \frac{\|A(h)\|_W}{\|h\|_V} = \infty$. (Beispiel: $V =$ stetige Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, für die ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $f(x) = 0$ für $|x| > N$ }, mit der Supremumsnorm, und $(Af)(x) = xf(x)$.)

Man kann aber leicht zeigen, dass eine lineare Abbildung $A : V \rightarrow W$ genau dann stetig ist, wenn $\sup_{h \in V, h \neq 0} \frac{\|A(h)\|_W}{\|h\|_V} < \infty$. Damit wird wiederum $\|\cdot\|_{L(V,W)}$ zu einer Norm auf $L(V, W)$, dem Vektorraum der stetigen linearen Abbildungen $V \rightarrow W$. Dies wird genauer in der Funktionalanalysis behandelt.

Notation: Im Folgenden verwenden wir die »klein-o« Notation. Sie macht manches übersichtlicher. Per Definition ist

$$r(h) = o(\|h\|) \text{ für } h \rightarrow 0 \quad : \iff \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0$$

Beweis (der Kettenregel): Sei $b = f(a)$. Nach Definition ist

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + Df|_a(h) + r(h), \quad r(h) = o(\|h\|) \text{ für } h \rightarrow 0, \\ g(b+k) &= g(b) + Dg|_b(k) + s(k), \quad s(k) = o(\|k\|) \text{ für } k \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} (g \circ f)(a+h) &= g(f(a+h)) = g(\underbrace{f(a)}_{=:b} + \underbrace{Df|_a(h) + r(h)}_{=:k}) \\ &= g(b) + Dg|_b(Df|_a(h) + r(h)) + s(Df|_a(h) + r(h)) \\ &= (g \circ f)(a) + (Dg|_b \circ Df|_a)(h) + r_2(h), \end{aligned}$$

wobei $r_2(h) = Dg|_b(r(h)) + s(Df|_a(h) + r(h))$. Es bleibt zu zeigen, dass $r_2(h) = o(\|h\|)$ für $\|h\| \rightarrow 0$.

Sei $C = \|Dg|_b\|_{L(W,X)}$. Wir erhalten für den ersten Summanden von $r_2(h)$:

$$\|Dg|_b(r(h))\|_X \leq C\|r(h)\|_W$$

Aus $r(h) = o(\|h\|)$ folgt damit $Dg|_b(r(h)) = o(\|h\|)$.

Ähnlich verfährt man mit dem zweiten Summanden von $r_2(h)$: Zunächst ist $\|Df|_a(h)\|_W \leq C'\|h\|_V$, $C' := \|Df|_a\|_{L(V,W)}$. Wegen $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r(h)\|_W}{\|h\|_V} = 0$ existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass für $\|h\|_V < \varepsilon$ gilt, dass $\|r(h)\|_W \leq \|h\|_V$, mit der Dreiecksungleichung folgt dann $\|Df|_a(h) + r(h)\|_W \leq C''\|h\|_V$ mit $C'' = C' + 1$, und daraus schließlich mit $s(k) = o(\|k\|)$, dass $s(Df|_a(h) + r(h)) = o(\|h\|_V)$ ist. \square

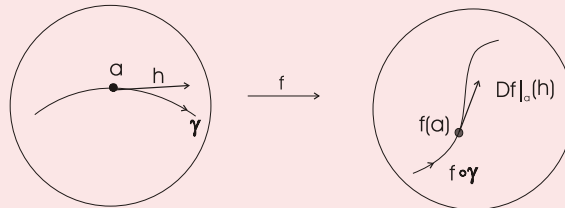
Bemerkung (zum ∞ -dimensionalen Fall): Bei unendlich-dimensionalen Vektorräumen bleibt dieser Beweis korrekt, da auch dann per Definition das Differential stetig ist, also endliche Abbildungsnorm hat. Dies ist ein guter Grund, warum diese Annahme in der Definition gemacht wurde.

Was bedeutet $Df|_a$ geometrisch?

Wir werden verschiedene Antworten kennenlernen. Die wichtigste ist folgende.

7.1.6 Satz

$f : U \subset V \rightarrow W$ sei in $a \in U$ differenzierbar. Sei $h \in V$. Dann gilt: Wenn sich x von a mit der Geschwindigkeit h (Momentangeschwindigkeit am Anfang) entfernt, dann entfernt sich $f(x)$ von $f(a)$ mit der Geschwindigkeit $Df|_a(h)$.



Das heißt: Sei $\gamma : I \rightarrow U$ eine Kurve derart, dass

$$\gamma(0) = a, \quad \gamma'(0) = h.$$

(Hierbei sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I$.)

Dann gilt für $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ (die Bildkurve von γ unter f):

$$\tilde{\gamma}(0) = f(a), \quad \tilde{\gamma}'(0) = Df|_a(h)$$

Beweis: $\tilde{\gamma}(0) = f(\gamma(0)) = f(a)$, und nach der Kettenregel □

$$\tilde{\gamma}'(0) = (f \circ \gamma)'(0) = Df|_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) = Df|_a(h)$$

Vorstellungen für Abbildungen

Der mathematische Begriff der Abbildung ist eine Abstraktion, die viele verschiedene Vorstellungen in sich vereint. Je nach Kontext kann eine Abbildung sehr verschiedene Bedeutung haben. Hier sind einige, die uns schon begegnet sind, und einige weitere. Sei $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung.

▷ $m = 1$ (Funktionen):

- Höhenfunktion ($n = 2$, $f(x) =$ Höhe über NN am Ort x).
- Temperatur, Luftdruck ($n = 3$, $f(x) =$ Temperatur bzw. Luftdruck am Ort x).
- Helligkeitsverteilung eines Bildes ($n = 2$).
- Bevölkerungsdichte ($n = 2$; dies als Funktion zu betrachten ist eine starke Idealisierung).

Bedeutung der Ableitung: $\nabla f(x) =$ Richtung des stärksten Anstiegs bei x (am Berg, der Temperatur etc.), $\|\nabla f(x)\| =$ Steilheit des Anstiegs.

▷ $n = 3, m = 2$:

- Abbildungen im umgangssprachlichen Sinn, z.B. Photo ($f(x) =$ Ort auf dem Photo, wo der reale Ort x abgebildet wird).

Bedeutung der Ableitung: Ein kleiner Pfeil h , der am Ort x angebracht ist, erscheint auf dem Photo als der Pfeil $Df|_x(h)$, am Ort $f(x)$ angebracht.

- Schatten (auf dem Boden oder an der Wand, bei punktförmiger Lichtquelle, $f(x) = \text{Ort}$, wo ein Punkt am Ort x seinen Schatten auf dem Boden wirft).

Bedeutung der Ableitung: Bewegt sich der Punkt mit Momentangeschwindigkeit h vom Ort x fort, so bewegt sich sein Schatten mit Momentangeschwindigkeit $Df|_x(h)$ vom Ort $f(x)$ fort.

▷ $n = m$:

- Vektorfeld: Kraftfeld, z. B. Gravitation, elektrische, magnetische Kraft ($f(x) = \text{Kraft}$, die auf einen punktförmigen Körper, der sich am Ort x befindet, einwirkt).
- Vektorfeld: stationäre Strömung ($f(x) = \text{Geschwindigkeit des Flüssigkeitsteilchens}$, das sich am Ort x befindet).

Bedeutung der Ableitung: Linearisierung des Vektorfelds (Wichtig für Differentialgleichungen: Falls $V(p) = 0$, so gleicht das – explizit berechenbare – Phasenportrait des linearen Vektorfelds $DV|_p$ nahe 0 dem Phasenportrait von V nahe p , unter schwachen Bedingungen an V).

- Verzerrung durch eine Linse ($n = m = 2$; fotografiere ein ebenes Bild durch eine Verzer-
rungslinse; $f(x) = \text{Ort auf dem Photo}$, wo der reale Ort x abgebildet wird).
- Koordinatenwechsel, zum Beispiel Polarkoordinaten, siehe unten.

Bedeutung der Ableitung: Siehe unten, nach Satz 7.2.3.

Visualisierungen für Abbildungen

Je nach Anwendung und je nach Dimension sind verschiedene Visualisierungen möglich.

▷ Graph (nur $n + m \leq 3$, da der Graph im $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$ liegt). Man erhält:

- $n = m = 1$: Kurve in der Ebene.
- $n = 2, m = 1$: Fläche im Raum.
- $n = 1, m = 2$: Kurve im Raum.

Bedeutung der Ableitung: Steigung der Tangente bzw. Tangentialebene.

▷ Niveaumengenportrait ($n = 2$ oder 3), d. h. Skizze der Niveaumengen $f^{-1}(c)$ für verschiedene Werte von c . Man erhält:

- $n = 2, m = 1$: Kurven in der Ebene (Beispiel: Höhenlinien auf Wanderkarten).
- $n = 3, m = 1$: Flächen im Raum (etwa wie Zwiebelschalen).
- $n = 3, m = 2$: Kurven im Raum.

Bedeutung der Ableitung ($m = 1$): $\nabla f(x)$ steht senkrecht auf der Niveaumenge von f , die durch x geht. $\|\nabla f(x)\|$ groß entspricht dicht beieinanderliegenden Niveaumengen (falls die c -Werte äquidistant gewählt sind, z. B. eine Höhenlinie für je 100 Meter Höhendifferenz).

▷ Vektorfeld: zeichne Pfeil an »jedem« Punkt, $n = m \leq 3$.

▷ Beispielphoto ($n = 3, m = 2$).

Dies sind statische Visualisierungen. Sie lassen sich in einem Bild zeichnen. Es gibt auch dynamische Visualisierungen, wo man sich eine Bewegung vorstellt (z. B. mittels Computer praktisch umsetzbar). Zum Beispiel stelle ich mir die Scherung $(x, y) \mapsto (x + y, y)$ am liebsten dynamisch vor. Natürlich ließe sich das statisch durch Zeichnen eines Rechtecks und seines Bildes (eines Parallelogramms) verwirklichen.

Polarkoordinaten

Polarkoordinaten ordnen jedem Punkt p der Ebene die Zahlen $r =$ Abstand von p zum Ursprung und $\vartheta =$ Winkel des Strecke \overline{Op} mit der positiven x -Achse zu. Sie sind oft zum Rechnen hilfreich.

Mathematisch ist es meist günstiger, die umgekehrte Abbildung

$$P(r, \vartheta) = (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$$

$$P : [0, \infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

zu betrachten, die jedem Abstand r und Winkel ϑ den entsprechenden Punkt (x, y) zuordnet. Man nennt P die **Polarkoordinatenabbildung**.

Bemerkung: Warum ist das günstiger als die umgekehrte Abbildung $Q : (x, y) \mapsto (r, \vartheta)$? Hier sind zwei eng verwandte Gründe:

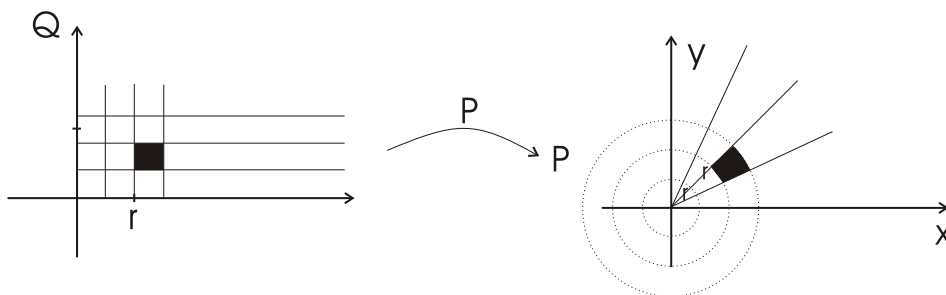
- (1) Um Q zu definieren, muss man einen Bereich für ϑ festlegen, z. B. $\vartheta \in [0, 2\pi)$. Dann ist Q aber nicht stetig bei der x -Achse (wo der Winkel von 2π auf 0 springt). Außerdem ist der Winkel für den Nullpunkt nicht definiert, daher müsste man diesen aus dem Definitionsbereich von Q herausnehmen.
- (2) Die Formel für Q ist recht kompliziert: $Q(x, y) = (r(x, y), \vartheta(x, y))$ mit

$$r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vartheta(x, y) = \begin{cases} \text{(Fallunterscheidung nach} \\ \text{Quadranten, z. B. } \arctan \frac{y}{x} \text{ für } x > 0, y \geq 0) \end{cases}$$

Da ist doch P sehr viel handlicher! Außerdem ist P überall C^∞ . (Wer unbedingt auf Q besteht, könnte es als mehrwertige Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty) \times \mathbb{R}$ auffassen – $Q(x, y)$ wäre dann die Menge $P^{-1}(x, y)$.)

Hier ein Bild (Q sollte links durch ϑ ersetzt werden, und links sollten die vertikalen Linien punktiert sein).



7.2 Der Satz über die Umkehrabbildung

Wir erinnern uns an folgenden Satz der Analysis I: Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$f'(x) \neq 0 \text{ für alle } x \implies f : I \rightarrow f(I) \text{ invertierbar, und } (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \text{ für } y = f(x),$$

insbesondere ist f^{-1} stetig differenzierbar. (Dies ist Satz I.11.1.9; dort wurde die Invertierbarkeit – als strenge Monotonie – von f vorausgesetzt. Sie folgt aber aus $f'(x) \neq 0$ für alle x , da nach dem Zwischenwertsatz f' auf I konstantes Vorzeichen haben muss.)

Frage: Gilt etwas Ähnliches in mehreren Dimensionen?

Antwort: Wir werden sehen: Fast. In höheren Dimensionen kann man nicht mehr die volle Invertierbarkeit folgern, nur noch die lokale Invertierbarkeit. Der Beweis ist eine der wichtigsten Anwendungen des Banachschen Fixpunktsatzes.

Was heißt eigentlich »stetig differenzierbar« für Abbildungen? Es gibt einen natürlichen Kandidaten hierfür:

7.2.1 Definition

Seien V, W normierte Vektorräume, $U \subset V$ offen und $f : U \rightarrow W$. f heißt **stetig differenzierbar** (oder **C^1 -Abbildung**), falls f auf U differenzierbar ist und die Abbildung

$$Df : U \rightarrow L(V, W)$$

stetig ist. Hierbei ist $L(V, W)$ als normierter Vektorraum mit der Norm $\| \cdot \|_{L(V, W)}$ zu verstehen, vgl. Definition 7.1.5.

Man überzeugt sich leicht, dass dies im Fall $W = \mathbb{R}$ äquivalent zur alten Definition ist, und dass $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ genau dann C^1 ist, wenn jede Komponente von f es ist. Also gilt für $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit Komponenten f_1, \dots, f_m :

f ist stetig differenzierbar \iff alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ existieren und sind stetig

Bemerkung: Für Liebhaber abstrakter Spielereien: Es liegt nun nahe, die zweite Ableitung von f als Differential von $Df : U \rightarrow L(V, W)$ aufzufassen. Dies würde (falls existent) eine Abbildung $D(Df) : U \rightarrow L(V, L(V, W))$ ergeben. Nun ist $L(V, L(V, W))$ kanonisch isomorph zum Vektorraum der bilinearen Abbildungen $V^2 \rightarrow W$ (indem man einer linearen Abbildung $A : V \rightarrow L(V, W)$ die bilineare Abbildung $V \times V \rightarrow W$, $(v_1, v_2) \mapsto (A(v_1))(v_2)$ zuordnet, Details als Übung). Im Fall $W = \mathbb{R}$ ergibt diese Identifikation genau die Identifikation von $D(Df)$ mit dem früher definierten $D^{(2)}f$, wie man sich leicht überzeugt. Ähnlich kann man mit höheren Ableitungen verfahren und den Begriff der C^k -Abbildung definieren, für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Zunächst ein Name für die angestrebte Schlussfolgerung:

7.2.2 Definition

Seien $U \subset V$, $\tilde{U} \subset W$ offen.

$f : U \rightarrow \tilde{U}$ heißt **Diffeomorphismus** : \iff

- (1) $f \in C^1$,
- (2) f bijektiv,
- (3) $f^{-1} \in C^1$.

7.2.3 Satz

$f : U \rightarrow \tilde{U}$ Diffeomorphismus mit $U \subset V$, $\tilde{U} \subset W$ offen, dann

- (1) $\dim V = \dim W$,
- (2) $Df|_a$ invertierbar für alle $a \in U$, und $(Df|_a)^{-1} = D(f^{-1})|_{f(a)}$.

Dies verallgemeinert die Regel über die Umkehrfunktion aus Analysis I, Satz I.11.1.9.

Beweis: Aus der Kettenregel folgt

$$\begin{aligned} f \circ f^{-1} = \text{id} &\implies Df|_a \circ D(f^{-1})|_{f(a)} = D_{\text{id}} = \text{id} \\ f^{-1} \circ f = \text{id} &\implies D(f^{-1})|_{f(a)} \circ Df|_a = \text{id} \end{aligned}$$

Daraus folgt (2). Da nur quadratische Matrizen invertierbar sein können, folgt auch (1). \square

Bemerkung:

- \triangleright Warum haben wir in Definition 7.2.2 nicht gleich $\dim V = \dim W$ angenommen, wenn es doch immer gilt? (In vielen Büchern wird dies getan.) Um zu verdeutlichen, dass wir hier etwas Nichttriviales bewiesen haben. Stellen wir uns folgende Frage:

(1) Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ bijektiv. Folgt daraus, dass $n = m$?

Anders herum gefragt (z. B. $n = 1, m = 2$): Hat die Ebene gleich viele Punkte wie die Gerade? Dies sollte Sie an den Anfang von Analysis I erinnern. Dort zeigten wir, dass $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist, dass also \mathbb{N} und $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gleich viele Punkte haben. Daher überrascht es nicht, dass die Antwort auf Frage (1) NEIN lautet. Fragen wir nun

(2) Dieselbe Frage wie (1), mit f stetig.

Anders herum gefragt (wieder $n = 1, m = 2$). Gibt es eine stetige Kurve, die den ganzen \mathbb{R}^2 ausfüllt? Das ist schwer vorstellbar, es gibt sie aber wirklich (die sogenannten raumfüllenden Kurven, zuerst von Peano entdeckt). Also wieder NEIN. Was muss man denn noch von f verlangen, damit die Antwort Ja lautet?

(3) Dieselbe Frage wie (1), mit f und f^{-1} stetig.

Hier ist die Antwort tatsächlich JA, aber das ist recht schwierig zu zeigen (am besten mit algebraischer Topologie). Für $n = 1$ ist es nicht schwierig. Hieraus folgt natürlich auch Satz 7.2.3. Aber wie wir sahen, ist der Beweis unter der stärkeren Voraussetzung der Differenzierbarkeit von f und f^{-1} sehr einfach.

▷ **Bedeutung der Ableitung** für Diffeomorphismen $f : U \rightarrow \tilde{U}, U, \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$:

Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$. Sei R_ε das Parallelogramm bei a mit den Seiten $\varepsilon v, \varepsilon w$, also mit den Ecken

$$a, a + \varepsilon v, a + \varepsilon w, a + \varepsilon v + \varepsilon w.$$

Dessen Bild unter f ist ungefähr ein Parallelogramm bei $f(a)$ mit Seiten $\varepsilon Df|_a(v), \varepsilon Df|_a(w)$, also Ecken $f(a), f(a) + \varepsilon Df|_a(v), f(a) + \varepsilon Df|_a(w), f(a) + \varepsilon Df|_a(v) + \varepsilon Df|_a(w)$.

»Ungefähr« soll heißen: Je kleiner ε , desto besser; genauer: Verschiebt man $f(R_\varepsilon)$ so, dass $f(a)$ in den Nullpunkt gelangt, und streckt das Resultat um den Faktor ε^{-1} , so erhält man eine Menge, die für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen das Parallelogramm mit Seiten $Df|_a(v), Df|_a(w)$ konvergiert. Beweis als Übung. Konvergenz hier im intuitiven Sinne, der sich durch folgende Metrik umsetzen lässt (sogenannte Hausdorff-Metrik auf der Menge der kompakten Teilmengen von \mathbb{R}^n): Für $A, B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt sei

$$d_H(A, B) = \inf\{r > 0 : A \subset B_r \text{ und } B \subset A_r\},$$

wobei $A_r := \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, A) < r\}$.

Beispiele:

▷ Jede invertierbare lineare Abbildung ist ein Diffeomorphismus.

▷ Die Polarkoordinatenabbildung P ist kein Diffeomorphismus, da sie nicht injektiv ist (es ist $P(r, \vartheta) = P(r, \vartheta + 2\pi)$ für alle (r, ϑ) und $P(0, \vartheta) = (0, 0)$ für alle ϑ). Schränkt man sie aber zum Beispiel auf $(0, \infty) \times (0, 2\pi)$ ein, erhält man einen Diffeomorphismus nach $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$. Dass die Umkehrabbildung C^1 ist, ist aus der Formel in der Bemerkung nach der Definition von P nicht unmittelbar zu entnehmen, folgt aber aus dem folgenden Satz.

Im Bild am Ende von Abschnitt 7.1 ist ein Quadrat mit Seiten e_1, e_2 und sein approximatives Bildparallelogramm (hier: Bildrechteck) eingezeichnet. Beachte, dass (für $a = (r, \vartheta)$ mit $r \neq 0$) $DP|_a(e_1)$ radial nach außen zeigt, weil e_1 in r -Richtung zeigt, und dass $DP|_a(e_2)$ tangential an den Kreis um Null durch $P(a)$ liegt (in Richtung anwachsenden ϑ 's), weil e_2 in ϑ -Richtung zeigt.

7.2.4 Satz (Satz über die Umkehrabbildung)

Sei $f : U \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Sei $a \in U$ und $Df|_a$ invertierbar. Dann ist f ein **lokaler Diffeomorphismus**, d. h. es gibt Umgebungen U' von a , U'' von $f(a)$, so dass $f : U' \rightarrow U''$ Diffeomorphismus ist.

Im Beweis werden wir folgendes Lemma brauchen, das Satz 1.3.7 auf höhere Dimensionen verallgemeinert.

7.2.5 Lemma (Schrankensatz)

V, W seien normierte Vektorräume und $U \subset V$ offen. $f : U \rightarrow W$ sei stetig differenzierbar. Seien $a, b \in U$. Falls die Strecke S von a nach b in U liegt, so gilt

$$\|f(b) - f(a)\|_W \leq L\|b - a\|_V, \quad L = \max_{x \in S} \|Df|_x\|_{L(V,W)},$$

wobei $\|\cdot\|_{L(V,W)}$ die Abbildungsnorm bezeichnet, siehe Definition 7.1.5.

Die Umkehrung wie in Satz 1.3.7 gilt auch, ist aber nicht so wichtig.

Beweis: Idee: Ähnlich wie beim Satz von Taylor reduzieren wir das Problem auf eine Dimension, indem wir die Strecke S parametrisieren: Sei $h = b - a$ und $\varphi(t) = f(a + th)$ für $t \in [0, 1]$. Dann gilt $\varphi(0) = f(a), \varphi(1) = f(b)$, also

$$f(b) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t) dt = \int_0^1 Df|_{a+th}(h) dt$$

nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und der Kettenregel, also

$$\begin{aligned} \|f(b) - f(a)\|_W &\leq \int_0^1 \|Df_{a+th}(h)\|_W dt && \text{nach Dreiecksungleichung, Lemma 5.2.6} \\ &\leq \int_0^1 \|Df_{a+th}\| \|h\|_V dt && \text{nach Definition der Operatornorm} \\ &\leq \int_0^1 L \|h\|_V dt = L \|h\|_V = L \|b - a\|_V \end{aligned}$$

□

Warum haben wir dies nicht analog zu Satz 1.3.7 bewiesen, mit Hilfe des Mittelwertsatzes? Weil es für Abbildungen $f : U \rightarrow W$ mit $\dim W > 1$ keinen Mittelwertsatz gibt! (Beispiel: $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, f(t) = (\cos t, \sin t)$, dann $f(2\pi) - f(0) = 0$, aber es gibt kein $\tau \in (0, 2\pi)$ mit $f'(\tau) = 0$.)

Bemerkung (zum ∞ -dimensionalen Fall): Streng genommen haben wir Lemma 5.2.6 nur für $W = \mathbb{R}^n$ bewiesen, und den Hauptsatz sogar nur für $W = \mathbb{R}$. Der Hauptsatz lässt sich durch komponentenweise Betrachtung sofort auf Kurven im \mathbb{R}^n verallgemeinern, und der Beweis von Lemma 5.2.6 funktioniert für beliebige Normen auf \mathbb{R}^n . Daher gilt beides für beliebiges endlich-dimensionales W (wähle eine Basis!).

Nur im Fall $\dim W = \infty$ muss man etwas aufpassen: Damit das Integral $\int_0^1 \gamma(t) dt$ für eine stetige Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow W$ überhaupt definiert ist, muss man annehmen, dass W vollständig ist (siehe Beweis von Satz I.13.2.2 in Analysis I). Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt auch **Banachraum**.

Die elementare Integrationstheorie aus Analysis I läuft für Banachraum-wertige Funktionen genauso wie für reellwertige Funktionen (einzige Ausnahme: Im Beweis von Satz I.13.2.5. ist das Infimum nicht definiert, da W nicht angeordnet ist, stattdessen wählt man $x'_i \in I_i$ beliebig und setzt $T(x) = x'_i$ für $x \in [x_{i-1}, x_i]$). Inklusiv dem Hauptsatz und Lemma 5.2.6.

Beweis (des Satzes über die Umkehrabbildung): Wir betrachten zunächst den Spezialfall $a = 0, f(0) = 0, Df|_0 = I$ (Identität) – getreu dem Motto: Wenn ein Problem kompliziert aussieht, betrachte zunächst ein einfacheres.

1. Schritt: Zeige, dass f »lokal surjektiv« ist, und finde eine stetige Inverse.

Zu gegebenem y (nahe 0) wollen wir also ein x (nahe 0) finden mit $f(x) = y$.

Wegen $f(0) = 0, Df|_0 = I$ ist

$$f(x) = 0 + I(x) + r(x) = x + r(x) \quad \text{mit } r(x) = o(\|x\|) \text{ für } x \rightarrow 0.$$

Damit ist $y = f(x)$ äquivalent zu

$$x = y - r(x).$$

Dies ist ein Fixpunktproblem mit Parameter! Genauer: Wir setzen $T(x, y) := y - r(x)$. Wir möchten Satz 5.3.2 anwenden. Dazu müssen wir Mengen $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ finden mit

- (a) T bildet $X \times Y$ nach X ab und ist stetig.
 (b) X vollständig (d. h. abgeschlossen, da \mathbb{R}^n vollständig ist – Satz 1.3.3).
 (c) T ist bezüglich x eine Kontraktion.

Wähle hierzu $\delta > 0$ derart, dass $\overline{K_{2\delta}}(0) \subset U$ und $\|Dr|_x\|_{L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{2}$ für $x \in \overline{K_{2\delta}}(0)$ gilt. Dies ist möglich, da $Dr|_0 = 0$ und $x \mapsto Dr|_x$ stetig ist.

Setze $X = \overline{K_{2\delta}}(0)$, $Y = K_\delta(0)$. Für $x, x' \in X$ ist dann $\|r(x) - r(x')\| \leq \frac{1}{2}\|x - x'\|$ nach Lemma 7.2.5. Insbesondere $\|r(x)\| \leq \frac{1}{2}\|x\|$ (nimm $x' = 0$).

Beweis von (a): Sei $x \in X$, $y \in Y$, dann ist

$$\|T(x, y)\| = \|y - r(x)\| \leq \|y\| + \|r(x)\| < \delta + \frac{1}{2}\|x\| \leq \delta + \frac{1}{2}2\delta = 2\delta,$$

also $T(x, y) \in X$. T ist stetig nach Definition.

Beweis von (b): Klar nach Definition.

Beweis von (c): $\|T(x, y) - T(x', y)\| = \|r(x') - r(x)\| \leq \frac{1}{2}\|x' - x\|$.

Damit ist der Fixpunktsatz mit Parameter anwendbar, und wir erhalten:

Für jedes $y \in Y$ hat $T(\cdot, y)$ genau einen Fixpunkt in X – nennen wir ihn $x = g(y)$ – und $g : Y \rightarrow X$ ist stetig.

Nach Definition von T gilt also $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$ für $x \in X$, $y \in Y$. Setze nun $U'' = Y = K_\delta(0)$, $U' = g(U'') = f^{-1}(U'')$. U'' ist offen, und da f stetig ist, ist auch U' offen.

2. Schritt: Zeige, dass die Umkehrabbildung g in $y = 0$ differenzierbar ist, mit Differential I .

Wegen $g(y) - g(0) - I(y) = g(y) - y$ ist also zu zeigen: $g(y) - y = o(\|y\|)$ ($y \rightarrow 0$).

Nach Definition ist $g(y) = y - r(g(y))$ für alle $y \in U''$, also folgt zunächst $\|g(y)\| \leq \|y\| + \|r(g(y))\| \leq \|y\| + \frac{1}{2}\|g(y)\|$ und hieraus durch Subtraktion von $\frac{1}{2}\|g(y)\|$ und Multiplikation mit 2, dass $\|g(y)\| \leq 2\|y\|$.

Mit $g(y) - y = -r(g(y)) = o(\|g(y)\|)$ folgt dann $g(y) - y = o(\|y\|)$.

3. Schritt: Reduktion des allgemeinen Falles auf den Spezialfall $a = f(a) = 0, Df|_0 = I$:

Zunächst gilt: Ist h ein Diffeomorphismus, so gilt der Satz für f (bei a) genau dann, wenn er für $f \circ h$ (bei $h^{-1}(a)$) gilt, und analog für $h \circ f$. (Einfache Übung mit der Kettenregel.)

Sei nun $T_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x - a$ die Translation, offenbar ein Diffeomorphismus. Ist f wie im Satz, dann gilt für $f_1 = T_{f(a)} \circ f \circ T_{-a}$, dass $f_1(0) = 0$, und dass die Gültigkeit des Satzes für f_1 bei 0 die Gültigkeit des Satzes für f bei a impliziert.

Also sei o. B. d. A. $a = 0, f(a) = 0$. Sei $A = Df|_0$. Dann hat $f_2 = A^{-1} \circ f$ das Differential $Df_2|_0 = I$, und der Satz gilt für f_2 genau dann, wenn er für f gilt – jeweils bei 0. Da weiterhin $f_2(0) = 0$ gilt, sind wir fertig. \square

Bemerkung: Wie kommt man darauf, die Gleichung $x + r(x) = y$ mittels des Fixpunktsatzes, also mittels Iteration, nach x aufzulösen? Mit folgender Überlegung: Wegen $r(x) = o(\|x\|)$ ist $r(x)$ sehr viel kleiner als x , für x nahe 0 (man sagt, es sei von kleinerer Ordnung als x). Daher muss das gesuchte x ziemlich nahe bei y liegen, d. h. $x_0 := y$ ist eine erste grobe Approximation von x . Das korrekte x muss die Gleichung $x = y - r(y - r(x))$ erfüllen (Einsetzen der ersten Gleichung in sich selbst). Das $r(x)$ macht hierbei einen sehr kleinen Fehler aus, da es ja innerhalb des schon kleinen r -Ausdrucks steht. Also sollte $x_1 = y - r(y)$ eine bessere Approximation für x sein. Setzt man dies nun wieder statt x in die erste Gleichung ein, sollte man erneut eine bessere Approximation erhalten etc.

Bemerkung (zum ∞ -dimensionalen Fall): Der Satz über die Umkehrabbildung gilt auch für Banachräume, mit demselben Beweis. In manchen Anwendungen (bei partiellen Differentialgleichungen) braucht man jedoch eine Version dieses Satzes auf Vektorräumen, deren Konvergenzbegriff (Topologie) nicht mittels einer Norm, sondern mittels eines ganzen unendlichen Systems von Normen gegeben ist, sogenannten

Fréchet-Räumen. Dass für diese auch der Satz über die Umkehrabbildung gilt, ist sehr schwierig zu zeigen und war eine der großen Leistungen von John Nash (in den 1950er Jahren) – dem »Helden« aus *A Beautiful Mind*.

Wozu der Satz über die Umkehrabbildung?

Wir werden ihm im Folgenden immer wieder begegnen. Eine unmittelbare Anwendung ist jedoch die Auflösbarkeit von Gleichungssystemen in der Nähe einer bekannten Lösung.

Beispiel: Betrachte das Gleichungssystem $xe^y = \alpha$

$$\sin x + \sin y = \beta$$

Gegeben sind α, β , finde x, y . Das System *praktisch* nach x, y aufzulösen ist unmöglich. Wir kennen aber eine spezielle Lösung: Für $\alpha = \beta = 0$ ist $x = y = 0$ eine Lösung. Der Satz über die Umkehrabbildung zusammen mit Satz 7.2.3 liefert die folgenden Aussagen:

(1) Für jedes (α, β) nahe Null gibt es genau eine Lösung (x, y) nahe Null.

(2) Für kleine α, β ist diese Lösung in erster Näherung $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha + \beta \end{pmatrix}$, also $x \approx \alpha$,
 $y \approx \beta - \alpha$.

Genauer sagt (1): Es gibt Umgebungen U', U'' von $(0, 0)$, so dass für jedes $(\alpha, \beta) \in U''$ genau eine Lösung $(x, y) \in U'$ existiert.

Denn mit $f(x, y) = \begin{pmatrix} xe^y \\ \sin x + \sin y \end{pmatrix}$ sowie $a = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ x, y \end{pmatrix}$ $f(a) = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ \alpha, \beta \end{pmatrix}$ ist

$$J_f(0, 0) = \begin{pmatrix} e^y & xe^y \\ \cos x & \cos y \end{pmatrix} \Big|_{x=y=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

das hat Determinante 1, ist also invertierbar. Also existieren U', U'' wie angegeben, so dass $f : U' \rightarrow U''$ bijektiv ist. Das ist gerade die Behauptung (1).

Zu (2): Nach Satz 7.2.3 lässt sich die Ableitung von f^{-1} bei $(0, 0)$ zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ berechnen. (2) folgt dann mit Taylor, oder einfacher aus der Definition des Differentials.

Vergleichen wir die Aussage des Satzes über die Umkehrabbildung mit der Aussage für eine Dimension am Anfang dieses Abschnitts, stellt sich die

Frage: Angenommen, $Df|_a$ ist für jedes $a \in U$ invertierbar. Folgt dann, dass f ein Diffeomorphismus $U \rightarrow f(U)$ ist? Also ein globaler, nicht ein lokaler Diffeomorphismus?

Antwort: Nein für $n \geq 2$.

Beispiel (Polarkoordinaten):

$$f(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \quad J_f = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$J_f(r, \varphi)$ ist invertierbar für $r \neq 0$. Trotzdem ist f nicht injektiv $(0, \infty) \times \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Bemerkung: Selbst für $n = 1$ ist die Antwort nur dann ja, wenn U ein Intervall ist, sonst nein. Was entspricht der Bedingung, Intervall zu sein, in $n > 1$? Es ist die Eigenschaft, zusammenhängend zu sein (vgl. die Bemerkungen vor Definition 1.2.4). Man nennt U **weg-zusammenhängend**, wenn man je zwei Punkte in U durch eine Kurve verbinden kann, d.h. wenn es zu je zwei Punkten $a, b \in U$ eine stetige Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ gibt mit $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$. Offenbar ist $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ wegzusammenhängend, aber trotzdem ist die Antwort Nein.

Hier noch eine hübsche Anwendung des Satzes über die Umkehrabbildung auf Matrizen:

Beispiel: Hat jedes $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine Wurzel?

D. h.: $\exists B \in M_n(\mathbb{R})$ mit $B^2 = A$? Wir zeigen: **Ja**, wenn A nahe bei I liegt. Betrachte

$$\begin{aligned} f : M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ B &\longrightarrow B^2 \end{aligned}$$

Wir sahen, dass $Df|_B(H) = BH + HB$. Für $B = I$ also $Df|_I(H) = H + H = 2H$. Weil $Df|_I : H \rightarrow 2H$ invertierbar ist, können wir den Satz über die Umkehrabbildung anwenden und erhalten:

$\exists U'$ Umgebung von I , U'' von $I^2 = I$, so dass $f : U' \rightarrow U''$ Diffeomorphismus ist. D. h.: $\forall A \in U'' \exists$ eindeutiges $B \in U'$ mit $B^2 = A$, und B hängt stetig (sogar differenzierbar) von A ab.

Bemerkung: Dasselbe geht für komplexe Matrizen. Eine genauere Untersuchung, welche Matrizen (auch weit weg von I) Quadratwurzeln haben, erfordert aber einiges mehr an Algebra. Zum Beispiel hat die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ keine Quadratwurzel, auch nicht in den komplexen Matrizen (einfach ansetzen und ausrechnen, führt zu Widerspruch).

7.3 Der Satz über implizite Funktionen

Der Satz über implizite Funktionen ist eines der zentralen Ergebnisse der Analysis. Er hat viele Gesichter. So sagt er interessante Dinge aus über

- ▷ das Auflösen von Gleichungen (und Gleichungssystemen)
- ▷ die Niveaumengen von Funktionen/Abbildungen
- ▷ die Klassifikation (»Normalformen«) von Abbildungen
- ▷ die Lösungen von Differentialgleichungen

und bildet ein zentrales Hilfsmittel bei der Untersuchung von Mannigfaltigkeiten, also Flächen im Raum und deren höherdimensionalen Verallgemeinerungen.

Vorüberlegungen

Worum geht es? Wir betrachten Abbildungen $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $n \geq m$ und wollen zwei äquivalente Fragen studieren:

Ist die Niveaumenge $f^{-1}(c)$ ein Graph?

Lässt sich die Gleichung $f(z) = c$ nach einigen der Variablen auflösen?

Hierbei ist $c \in \mathbb{R}^m$ fixiert. Warum sind die beiden Fragen äquivalent? Betrachten wir $n = 2$, $m = 1$. Die Gleichung $f(x, y) = c$ nach y aufzulösen bedeutet, eine Funktion g zu finden mit

$$f(x, y) = c \iff y = g(x).$$

Dies lässt sich als $\{(x, y) : f(x, y) = c\} = \{(x, y) : y = g(x)\}$ schreiben, bedeutet also, dass $f^{-1}(c)$ genau der Graph von g ist.

Was können wir als Antwort erwarten? Betrachten wir einige Beispiele.

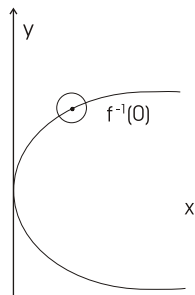
Beispiele:

- (a) $f(x, y) = y - x^2$. Es gilt: $f(x, y) = 0 \iff y = x^2$, also ist $f^{-1}(0)$ ein Graph.

(b) $f(x, y) = x - y^2$. Hier ist $f^{-1}(c)$ kein Graph einer Funktion $y = g(x)$, siehe Bild.

Aber: Nahe $(x_0, y_0) \in f^{-1}(0)$ mit $y_0 > 0$: lokaler Graph von $y = \sqrt{x}$
 $y_0 < 0$: lokaler Graph von $y = -\sqrt{x}$.

Jedoch: Nahe $(x_0, y_0) = (0, 0) : f^{-1}(0)$ ist nicht einmal lokaler Graph.



(c) $f(x, y) = x - y^3$. Graph der Funktion $y = \sqrt[3]{x}$. Diese ist aber in $x = 0$ nicht differenzierbar!

Hierbei bedeutet » $f^{-1}(c)$ ist **lokaler Graph nahe** (x_0, y_0) « folgendes: Es gibt eine Umgebung U_0 von (x_0, y_0) , so dass $f^{-1}(c) \cap U_0$ ein Graph ist.

Frage: Was macht den Unterschied? Wie kann man an f ablesen, ob $f^{-1}(0)$ lokaler Graph einer differenzierbaren Funktion ist oder nicht?

Um eine Antwort zu finden, stellen wir ein paar *heuristische* Überlegungen an. (Heuristik = Strategie, um etwas zu finden – ein wesentlicher, in der Lehre und in Büchern oft vernachlässigter Teil der Mathematik.) Dabei lassen wir uns von der geometrischen Vorstellung leiten.

Bleiben wir bei $f(x, y) = x - y^2$. Was ist anders bei $y_0 = 0$ als bei $y_0 \neq 0$? Was verhindert, dass $f^{-1}(0)$ nahe $y_0 = 0$ ein lokaler Graph ist?

Die **vertikale Tangente!** Denn ein Graph hat niemals eine vertikale Tangente.

Wie drückt sich das als Bedingung an f aus?

Vertikale Tangente bedeutet horizontale Normale (Senkrechte). Nach Satz 6.4.3 steht $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ senkrecht auf der Niveaumenge von f . Dieser Vektor ist horizontal, wenn seine zweite Komponente gleich Null ist.

Zusammenfassung: Wir haben für $M = f^{-1}(0)$ und einen beliebigen Punkt $p = (x_0, y_0)$ gezeigt:

- ▷ M hat vertikale Tangente bei $p \Rightarrow M$ ist nahe p kein lokaler Graph $y = g(x)$
- ▷ M hat vertikale Tangente bei $p \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0$

Wir hätten gerne eine Aussage, wie man an f ablesen kann, ob M lokaler Graph ist. Die beiden genannten Implikationen legen nahe, dass die Bedingung $\frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0$ hierbei eine Rolle spielt. Sie ergeben aber noch keinen logischen Zusammenhang (beachte die Richtung der Implikationspfeile). Der Satz über implizite Funktionen sagt, dass genau so ein logischer Zusammenhang wirklich besteht.

Daher hat diese Heuristik zwar unsere Frage nicht vollständig gelöst, sie hat uns aber auf die richtige Fährte gebracht.

Der Fall einer Gleichung

Wir betrachten sofort den etwas allgemeineren Fall, dass x mehr-dimensional sein darf. Die gesuchte Funktion g ist dann eine Funktion mehrerer Variablen. Wir bezeichnen die Variablen in \mathbb{R}^n mit (x, y) , wobei $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Im folgenden Satz ist also $x_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$, $y_0 \in \mathbb{R}$.

7.3.1 Satz (über implizite Funktionen, Spezialfall einer Gleichung)

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Sei $(x_0, y_0) \in U$ und $c = f(x_0, y_0)$.

Angenommen, es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

Dann gibt es Umgebungen $U' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ von x_0 , $U'' \subset \mathbb{R}$ von y_0 und eine C^1 -Funktion $g : U' \rightarrow U''$, so dass gilt: Für alle $x \in U'$, $y \in U''$ ist

$$f(x, y) = c \iff y = g(x)$$

Der Satz hat zwei äquivalente Lesarten: Falls $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, so gilt:

- ▷ Die Niveaumenge $f^{-1}(c)$ ist ein lokaler Graph, genauer

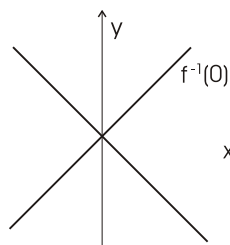
$$f^{-1}(c) \cap (U' \times U'') = \text{Graph von } g$$

- ▷ Die Gleichung $f(x, y) = c$ lässt sich lokal nach y auflösen, genauer:

Ist (x_0, y_0) eine Lösung der Gleichung, so gibt es zu jedem x nahe x_0 (d.h. $x \in U'$) genau ein y nahe y_0 (d.h. $y \in U''$) mit $f(x, y) = c$, und die Funktion $x \mapsto y$ ist C^1 .

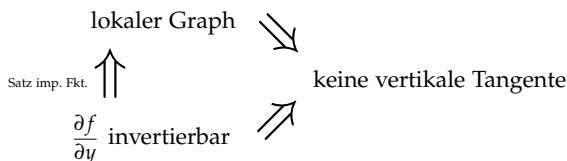
Bemerkung:

- ▷ Man sagt, g sei durch f implizit definiert. Eigentlich sollte es also heißen: Satz über implizit definierte Funktionen.
- ▷ Der Satz sagt nichts darüber aus, ob es für g eine Formel gibt. Das ist oft nicht der Fall, auch wenn f durch eine Formel gegeben ist. Es geht hier also um prinzipielle Auflösbarkeit, nicht um explizite.
- ▷ Die Bedingung $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ ist hinreichend, aber nicht notwendig für die lokale Auflösbarkeit.
Beispiel: $f(x, y) = y^2$, dann ist $f^{-1}(0)$ die x -Achse, also Graph von $g \equiv 0$, aber dort ist $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0$.
- ▷ **Merkhilfe** für die Bedingung $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$:
Wenn man $f(x, y) = 0$ nach y auflösen will, muss die Gleichung auch »echt« von y abhängen. Daher die Ableitung nach y (und nicht etwa nach x).
Dies wird noch deutlicher, wenn sich den Extremfall ansieht, wo $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ für *alle* (x, y) . Das hieße, dass f gar nicht von y abhängt, also y gar nicht in der Gleichung $f = 0$ auftaucht. Dann könnte man die Gleichung natürlich auch nicht nach y auflösen!
- ▷ Die Idee der vertikalen Tangente hat uns zwar zur richtigen Bedingung geführt, aber sie entspricht nicht ganz genau unserer Frage; denn es gibt Beispiele, wo $f^{-1}(0)$ zwar keine vertikale Tangente hat, aber trotzdem kein lokaler Graph ist!
Beispiel: $f(x, y) = x^2 - y^2$ bei $(0, 0)$.



Mit anderen Worten: Die Umkehrungen der Implikationen, die wir in der Zusammenfassung der Vorüberlegungen formulierten, gelten nicht.

Die logischen Beziehungen sehen also wie folgt aus, wobei nicht eingezeichnete Implikationen auch nicht gelten.



Ähnlich wie beim Satz über die Umkehrfunktion kann man die Ableitungen der Funktion g mittels der Ableitungen von f berechnen:

7.3.2 Satz (Zusatz zum Satz über implizite Funktionen)

Die Voraussetzungen seien dieselben wie in Satz 7.3.1. Dann gilt für $i = 1, \dots, n-1$

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

Man sollte sich nicht diese Formel merken, sondern ihre Herleitung:

Beweis: Nach Definition von g gilt die Gleichung $f(x, g(x)) = c$ für alle x . Leitet man dies nach x_i ab und verwendet die Kettenregel, erhält man

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0$$

wobei die f -Ableitungen bei $(x, g(x))$ und die g -Ableitung bei x ausgewertet wird. Setzt man $x = x_0$, folgt die Behauptung. \square

Beweis (von Satz 7.3.1 über implizite Funktionen): Um den Blick auf's Wesentliche zu lenken, nehmen wir zunächst $n = 2$ an.

Idee: Wir wollen den Satz über die Umkehrabbildung verwenden. Dazu ergänzen wir eine »triviale« Gleichung für x : D. h. statt nur $f(x, y) = c$ nach y aufzulösen, wollen wir das System

$$\begin{array}{l}
 x = \zeta \\
 f(x, y) = c
 \end{array}$$

nach x, y als Funktionen von ζ, c auflösen. Insbesondere ist dann y eine Funktion von ζ, c ; wegen $x = \zeta$ ist es damit eine Funktion von x, c und daher für festes c eine Funktion von x , wie gewünscht.

Genauer und etwas formaler: Setze $F(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ f(x, y) \end{pmatrix}$. Die Jacobi-Matrix von F ist $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$.

Diese Matrix hat Determinante $\frac{\partial f}{\partial y}$, und dies ist nach Voraussetzung bei (x_0, y_0) ungleich Null. Also ist $DF|_{(x_0, y_0)}$ invertierbar, und nach dem Satz über die Umkehrabbildung gibt es Umgebungen U_0 von (x_0, y_0) und U_1 von $F(x_0, y_0) = (x_0, c)$, so dass $F : U_0 \rightarrow U_1$ ein Diffeomorphismus ist, also eine C^1 -Inverse $G : U_1 \rightarrow U_0$ besitzt. Schreibe $G = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix}$, dann ist also für alle $(x, y) \in U_0, (\zeta, \eta) \in U_1$

$$\begin{array}{l}
 x = \zeta \\
 f(x, y) = \eta
 \end{array}
 \iff
 \begin{array}{l}
 x = G_1(\zeta, \eta) \\
 y = G_2(\zeta, \eta)
 \end{array}$$

Aus der Gleichung $x = \xi$ oben links folgt, dass die obere rechte Gleichung auch $x = \xi$ lauten muss, also $G_1(\xi, \eta) = \xi$ für alle (ξ, η) . Definiere die Funktion g durch $g(x) = G_2(x, c)$. Damit folgt schließlich

$$f(x, y) = c \iff F(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = G(x, c) \iff y = G_2(x, c) = g(x)$$

was zu zeigen war. Die Umgebungen U' von x_0 und U'' von y_0 muss man nur so wählen, dass das Rechteck $U' \times U''$ in U_0 enthalten ist.

Der Beweis für $n > 2$ läuft exact gleich, außer dass x, ξ jetzt $(n-1)$ -Tupel sind und DF eine $n \times n$ -Matrix der Form $\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ * & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$ ist, wobei I_{n-1} die $(n-1) \times (n-1)$ -Einheitsmatrix, 0 eine Spalte von $n-1$ Nullen und $*$ eine Zeile von $n-1$ unwichtigen Einträgen ist. \square

Bemerkung:

- ▷ Der Beweis zeigt sogar etwas mehr: Die Lösung y der Gleichung $f(x, y) = c$ hängt nicht nur glatt von x ab, sondern auch von c , wenn man dies variiert. Diese Abhängigkeit ist gerade durch die Funktion G_2 gegeben.
- ▷ Geometrische Bedeutung der Abbildung F : Wir stellen uns F als Abbildung von der (x, y) -Ebene in die (ξ, η) -Ebene vor. F bildet dann die Niveaumenge $f^{-1}(c)$ auf eine gerade Strecke $\eta = c$ ab. Diese ist parallel zur ξ -Achse. Die Höhenlinien von f werden also durch die Abbildung F geradegebogen. (Hier fehlt noch ein Bild)

Der Fall *mehrerer* Gleichungen

Wir betrachten nun ein Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= c_1 \\ &\vdots \\ f_m(x, y) &= c_m \end{aligned}$$

(wobei x und y mehrere Komponenten haben dürfen) und fragen, ob es sich nach y als Funktion von x auflösen lässt. Für lineare Gleichungssysteme wissen wir, dass es eine Chance auf Auflösbarkeit, also eine eindeutige Lösung, nur dann gibt, wenn

$$\text{Anzahl der Unbekannten} = \text{Anzahl der Gleichungen}$$

ist. Hier sind die Unbekannten die Komponenten von y . Da differenzierbare Abbildungen durch lineare approximiert werden (Definition des Differentials!), ist es vernünftig, anzunehmen, dass y genau m Komponenten hat, also $y \in \mathbb{R}^m$.

Wir schreiben das Gleichungssystem kurz als $f(x, y) = c$, wobei $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$. Sei n die Gesamtzahl der Komponenten von x und y . Also $x \in \mathbb{R}^{n-m}$, $y \in \mathbb{R}^m$ und $(x, y) \in \mathbb{R}^n$. Statt einer partiellen Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}$ haben wir nun eine $m \times m$ -Matrix

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)} := \left(\frac{\partial f_j}{\partial y_i} \right)_{i,j=1, \dots, m}$$

7.3.3 Satz (über implizite Funktionen, allgemeiner Fall)

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine C^1 -Abbildung auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Seien $x_0 \in \mathbb{R}^{n-m}$, $y_0 \in \mathbb{R}^m$ derart, dass $(x_0, y_0) \in U$. Sei $c = f(x_0, y_0)$.

Angenommen, die Matrix $\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}(x_0, y_0)$ ist invertierbar.

Dann gibt es Umgebungen $U' \subset \mathbb{R}^{n-m}$ von x_0 , $U'' \subset \mathbb{R}^m$ von y_0 und eine C^1 -Abbildung $g : U' \rightarrow U''$, so dass gilt: Für alle $x \in U'$, $y \in U''$ ist

$$f(x, y) = c \iff y = g(x)$$

Die Bemerkungen nach Satz 7.3.1 und nach dessen Beweis gelten alle auch hier, mutatis mutandis. (Zu deutsch: wobei geändert werden muss, was verschieden ist.)

Die Niveaumenge hat die Dimension $n - m$, da sie von den $n - m$ Variablen x_1, \dots, x_{n-m} parametrisiert wird. Siehe die Beispiele weiter unten.

Beweis: Der Beweis von Satz 7.3.1 kann fast wörtlich übernommen werden: Wieder setzen wir $F(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ f(x, y) \end{pmatrix}$, eine Abbildung von $U \subset \mathbb{R}^n$ nach \mathbb{R}^n . Das Differential von F ist nun eine Blockmatrix der Form $\begin{pmatrix} I_{n-m} & 0 \\ * & \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)} \end{pmatrix}$, wobei I_{n-m} die Einheitsmatrix der Größe $n - m$, 0 die Null-Matrix der Größe $(n - m) \times m$ und $*$ eine unwichtige Matrix der Größe $m \times (n - m)$ ist. Die Determinante dieser Matrix ist $\det I_{n-m} \det \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)} = \det \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}$, und nach Voraussetzung ist dies bei (x_0, y_0) ungleich Null. Der Satz über die Umkehrabbildung gibt die lokale Invertierbarkeit von F , und aus der Inversen kann man wie vorher die Abbildung g ablesen. \square

Wir haben auch wieder eine Formel für die Ableitung(-smatrix) von g :

7.3.4 Satz (Zusatz zum allgemeinen Satz über implizite Funktionen)

Die Voraussetzungen seien dieselben wie in Satz 7.3.3. Dann gilt

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0) = - \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

wobei $\frac{\partial f}{\partial y}$ kurz für $\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}$ steht usw.

Da es sich hier um Matrizen handelt, ist im Produkt rechts die Reihenfolge wichtig.

Beweis: Wiederum leiten wir $f(x, g(x)) = c$ nach x ab und verwenden dabei die Kettenregel:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

wobei die f -Ableitungen bei $(x, g(x))$ und die g -Ableitung bei x ausgewertet wird. Setzt man $x = x_0$, folgt die Behauptung durch Umstellen. \square

Beispiele: Sei $n = 3$. Wir bezeichnen die Variablen in \mathbb{R}^3 mit (x, y, z) .

(1) $m = 1$: Die Niveaumenge einer Funktion in \mathbb{R}^3 ist typischerweise eine Fläche:

Sei $p = (x_0, y_0, z_0)$, $c = f(p)$ und $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$. Dann ist nach Satz 7.3.1

$$f^{-1}(c) \cap U_0 = \{(x, y, z) : z = g(x, y)\}$$

für eine Funktion g und eine Umgebung U_0 von p ; das ist eine Fläche.

Beispiel: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $p = (0, 0, 1)$, also $c = 1$. Es ist $\frac{\partial f}{\partial z} = 2z \neq 0$ bei p .

Löse $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nach z auf: $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

(Warum die positive Wurzel? Damit bei $x = y = 0$ der Wert $z = 1$ herauskommt, also der Punkt p .)

Die Niveaumenge $f^{-1}(1)$ ist die Kugel; die obere Halbkugel lässt sich als Graph über der (x, y) -Ebene schreiben.

- (2) $m = 2$: Die Niveaumenge zweier Funktionen in \mathbb{R}^3 ist typischerweise eine Kurve:

Sei $p = (x_0, y_0, z_0)$, $c_1 = f_1(p)$, $c_2 = f_2(p)$ und $\det \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(y, z)}(p) \neq 0$. Dann ist nach Satz 7.3.3 mit $f = (f_1, f_2)$, $c = (c_1, c_2)$

$$f^{-1}(c) \cap U_0 = \{(x, y, z) : y = g_1(x), z = g_2(x)\}$$

für Funktionen g_1, g_2 und eine Umgebung U_0 von p , das ist eine Kurve, da auf der rechten Seite der einzige freie Parameter x ist.

Beachte, dass $f^{-1}(c) = \{(x, y, z) : f_1(x, y, z) = c_1, f_2(x, y, z) = c_2\} = f_1^{-1}(c_1) \cap f_2^{-1}(c_2)$ der Schnitt zweier Flächen ist. Es überrascht daher nicht, dass eine Kurve herauskommt.

Beispiel: $f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $f_2(x, y, z) = x - y$, $p = (0, 0, 1)$, also $c_1 = 1$, $c_2 = 0$. Es ist $\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(y, z)} = \begin{pmatrix} 2y & 2z \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Big|_{p} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ invertierbar.

Löse $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x - y = 0$ nach y, z als Funktionen von x auf, erhalte $y = x$, $z = \sqrt{1 - 2x^2}$. Dies ist eine Kurve, der Schnitt der Kugel mit der Ebene $x = y$.

Beispiele: In Spezialfällen reduziert sich der Satz über implizite Funktionen auf uns schon bekannte Sätze.

- (1) Eine Gleichung (oder ein System) der Form $h(y) - x = 0$ wobei $h : U \xrightarrow{\subset \mathbb{R}^m} \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar ist. Die Gleichung $h(y) - x = 0$ nach y aufzulösen bedeutet eine Abbildung g zu bestimmen mit $h(y) = x \iff y = g(x)$, d.h. die Umkehrabbildung von h zu finden. Sei etwa $h(0) = 0$. Mit $f(x, y) = h(y) - x$ sagt der Satz über implizite Funktionen, dass die Auflösung lokal nahe 0 möglich ist, falls $D_y f|_{(0,0)}$ invertierbar ist. Nun ist $D_y f|_{(0,0)} = Dh|_0$, also ist dies genau die Bedingung im Satz über die Umkehrfunktion.

Betrachte z. B. die Gleichung $y + \sin y - x = 0$.

Hier $f(x, y) = y + \sin y - x$. Eine Lösung ist $x = y = 0$. Wegen $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = (1 + \cos y)|_{x=y=0} = 1 + \cos 0 = 2 \neq 0$ ist die Gleichung nahe $x = y = 0$ nach y auflösbar. Es gibt also eine Funktion g (nahe $x = 0$ definiert), so dass, für x, y in geeigneten Umgebungen von 0,

$$y + \sin y - x = 0 \iff y = g(x).$$

Anders gesagt: Mit $h(y) = y + \sin y$ ist $h(y) = x \iff y = g(x)$, d.h. g ist die Umkehrfunktion zu h .

- (2) Falls f bezüglich y linear ist, d.h. $f(x, y) = A(x)y$ mit einer $m \times m$ -Matrix $A(x)$ (genauer: einer C^1 -Abbildung $A : U_1 \xrightarrow{\subset \mathbb{R}^k} M_m(\mathbb{R})$), so ist $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = A(x)$.

Der Satz über implizite Funktionen sagt also: Falls $A(a)$ invertierbar ist, so ist $A(x)y = c$ nach y für x nahe a (und alle y) auflösbar.

Für $x = a$ ist das lineare Algebra, und die Aussage für x nahe a folgt daraus, dass A stetig und die Menge der invertierbaren Matrizen offen ist (denn sie ist gleich dem Urbild von $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ unter der Determinantenfunktion $\det : M_m(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, und diese ist stetig). Siehe Satz 1.4.4. Damit ist $A(x)$ für x nahe a invertierbar.

A Überblick: Ableitungskonzepte für Funktionen

$(V, \|\cdot\|)$ sei ein normierter Vektorraum (z. B. \mathbb{R}^n mit der euklidischen Norm), $U \subset V$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

▷ **Richtungsableitung:** Zu $a \in U$ und $h \in V$ sei (falls existent)

$$(A.1) \quad \partial_h f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} \quad \left(=: \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(a+th) \right).$$

Bedeutung: Wie schnell ändert sich $f(x)$, wenn sich x von a mit Geschwindigkeitsvektor h entfernt?

Gesamtobjekt: Zu festem $h \in V$ ist $\partial_h f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

Spezialfall partielle Ableitung: Für $V = \mathbb{R}^n$, $h = e_i$ ($i \in \{1, \dots, n\}$) schreibt man

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} f := \partial_{e_i} f$$

Andere gebräuchliche Schreibweisen dafür: $\partial_i f$, f'_{x_i} , oft auch f_{x_i} , f_i oder f'_i

In Koordinaten ($V = \mathbb{R}^n$): $\partial_h f(a) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(a) h_i$ (falls f in a differenzierbar ist).

▷ **Differential:** Zu $a \in U$ sei $Df|_a : V \rightarrow \mathbb{R}$ die lineare Abbildung (falls existent), für die gilt:

$$(A.2) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Df|_a(h)}{\|h\|} = 0.$$

Bedeutung: $Df|_a$ ist die beste lineare Approximation von f im Punkt a , d. h.

in Formeln: $f(a+h) = \underbrace{f(a) + Df|_a(h)}_{\text{linear}} + o(\|h\|)$ für $h \rightarrow 0$

geometrisch: Der Graph von $Df|_a$ ist (wenn man den Nullpunkt in den Punkt $(a, f(a))$ verschiebt) die Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $(a, f(a))$.

(Die Graphen sind Teilmengen von $V \times \mathbb{R}$.)

Gesamtobjekt: Sei $L(V, \mathbb{R}) = \{\text{lineare Abbildungen } V \rightarrow \mathbb{R}\}$, dann $Df : U \rightarrow L(V, \mathbb{R})$.

In Koordinaten ($V = \mathbb{R}^n$): $Df|_a(h) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(a) h_i$.

Andere übliche Schreibweisen: $df|_a$, $Df(a)$, $df(a)$.

▷ **Gradient:** Auf V sei ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gegeben (z. B. euklidisches Skalarprodukt im \mathbb{R}^n). Zu $a \in \mathbb{R}$ sei $\nabla f(a) \in V$ der eindeutig bestimmte Vektor mit der Eigenschaft

$$\langle \nabla f(a), h \rangle = Df|_a(h) \quad \text{für alle } h \in V.$$

Bedeutung:

$\nabla f(a)$ hat die Richtung des schnellsten Anwachsens von $f(x)$, wenn sich x von a mit Geschwindigkeit(-sbetrag) 1 entfernt (falls $\nabla f(a) \neq 0$).

$\|\nabla f(a)\|$ = die Änderungsrate von f in dieser Richtung (bei Geschwindigkeit = 1).

Gesamtobjekt: $\nabla f : U \rightarrow V$.

In Koordinaten ($V = \mathbb{R}^n$, euklidisches Skalarprodukt): $\nabla f(a) =$ der Vektor mit Komponenten $\partial_1 f(a), \dots, \partial_n f(a)$.

Bemerkungen:

- ▷ Falls f differenzierbar in a ist, d. h. falls $Df|_a$ existiert mit (A.2), so ist

$$Df|_a(h) = \partial_h f(a) \quad \text{für alle } h \in V.$$

Also sind $Df|_a$ und $h \mapsto \partial_h f(a)$ dieselben Objekte.

Die Bedingung (A.2) ist aber etwas stärker als die Bedingung, dass $\partial_h f(a)$ für alle h existiert. Sie ist auf zwei Weisen stärker: Erstens muss $\partial_h f(a)$ linear von h abhängen, und zweitens muss der Grenzwert (A.1) gleichmäßig bzgl. der Richtungen von h gelten. Siehe Seite 101 für ein Beispiel, wo zwar $\partial_h f(a)$ für alle h existiert, aber nicht linear von h abhängt; es gibt auch Beispiele, wo es existiert und linear von h abhängt und trotzdem (A.2) nicht gilt.

Wie in Analysis I sind fast alle »vernünftigen« Funktionen differenzierbar. Ein wichtiges hinreichendes Kriterium (neben den Rechenregeln) für Differenzierbarkeit in a ist, dass die partiellen Ableitungen in einer Umgebung von a existieren und stetig sind.

- ▷ $Df|_a$, $\nabla f(a)$ und $(h \mapsto \partial_h f(a))$ enthalten dieselben Informationen (wenn $Df|_a$ existiert), verkörpern aber unterschiedliche Vorstellungen. Alle sind wichtig, je nach Kontext.
- ▷ Df ist nur durch f allein definiert. Im Gegensatz dazu: ∇f bezieht sich auf ein Skalarprodukt auf V . Die erste Aussage stimmt jedenfalls für $\dim V < \infty$. Denn dann sind alle Normen auf V äquivalent, d. h. in (A.2) ist es irrelevant, welche Norm verwendet wird.

Dies ist dann relevant, wenn auf demselben Raum verschiedene Skalarprodukte betrachtet werden oder zumindest kein einzelnes kanonisch ausgezeichnet ist. Deshalb ist dann Df ein »besseres« Objekt als ∇f . (besser = hat eigenständige Bedeutung ohne Zusatzdaten)

Diese Situation tritt im Kontext von Mannigfaltigkeiten (z. B. Differentialgeometrie, globale Analysis) und in der allgemeinen Relativitätstheorie auf.

- ▷ Das Differential wird manchmal auch »totales Differential« genannt und die Kettenregel die »Regel vom totalen Differential«.
- ▷ Beziehung des Differentials zur »üblichen« Ableitung im Fall $n = 1$:

Für eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}$, ist $Df|_a(h) = f'(a)h$.

Mit anderen Worten: $L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist isomorph zu \mathbb{R} , mittels der Abbildung

$$I : \mathbb{R} \rightarrow L(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \alpha \mapsto (\text{die Abbildung } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h \mapsto \alpha h).$$

Dann ist $Df = I \circ f'$:

$$Df : U \xrightarrow{f'} \mathbb{R} \xrightarrow{I} L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

B Überblick: Allgemeine Prinzipien für Differentialgleichungen

Dies ist eine Zusammenstellung der wichtigsten Prinzipien und Methoden zur Behandlung von Differentialgleichungen, die wir kennengelernt haben (es gibt noch viel mehr...).

Allgemeine Gleichungen/Systeme

- ▷ 1 Gleichung n -ter Ordnung \rightarrow System von n Gleichungen 1-ter Ordnung (Satz 5.1.1)
- ▷ Lösen eines autonomen Systems \leftrightarrow Bestimmen der Integralkurven eines Vektorfelds, dabei Anfangsbedingung \leftrightarrow Integralkurve durch gegebenen Punkt (Abschnitt 2.2)
- ▷ Nicht-autonome Systeme der Dimension n \leftrightarrow gewisse autonome Systeme der Dimension $n + 1$, genauer: $\frac{dy}{dx} = F(x, y) \leftrightarrow$ Vektorfeld $V(x, y) = (1, F(x, y))$
(hier $x \in I \subset \mathbb{R}$, $y \in U \subset \mathbb{R}^n$, $F(x, y) \in \mathbb{R}^n$) (Satz 2.2.3, dort nur für $n = 1$ formuliert)
- ▷ Orbits von Lösungen können manchmal leichter bestimmt werden als Integralkurven;
- ▷ Orbits eines Vektorfelds auf $U \subset \mathbb{R}^n$ bilden eine Zerlegung von U .
3 Typen von Orbits: Punkt, geschlossene Kurve (periodische Lösung, für alle Zeiten definiert), nicht geschlossene Kurve (Lösung verlässt jedes Kompaktum, falls endliche Lebensdauer).
(Satz 5.4.2, 5.4.3)
- ▷ Autonomes System (Vektorfeld) mit $n = 2$:
Erstes Integral ergibt »implizite Lösung«, erlaubt Bestimmung der Orbits.
Erstes Integral manchmal mittels Separation der Variablen erhältlich.
- ▷ Allgemeine Aussagen über Lösungen:
Betrachte $y' = F(t, y)$, $y(t_0) = y_0$, mit $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl. y , $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen.
 - Lösungen existieren lokal (Satz 5.2.10).
 - Lösungen sind global eindeutig (Lemma 5.2.13).
 - Es gibt genau eine maximale Lösung.
 - Die Lösung hängt stetig von (t_0, y_0) und von Parametern in der Gleichung ab (Satz 5.3.4).
 - Bedingung an F ist erfüllt, wenn F stetig differenzierbar (Lemma 5.2.9).

Lineare Gleichungen/Systeme

Variable Koeffizienten (= nicht-autonom = allgemeiner Fall):

Für eine Gleichung n -ter Ordnung oder ein System von n Gleichungen erster Ordnung gilt:

- ▷ n -dimensionaler Lösungsraum,

- ▷ Lösungen sind überall definiert, AWP ist eindeutig lösbar (n Anfangsbedingungen)
- ▷ Allgemeine inhomogene Lösung = allgemeine homogene Lösung + spezielle inhomogene Lösung.
- ▷ Variation der Konstanten liefert spezielle inhomogene Lösung aus allgemeiner homogener Lösung.

Konstante Koeffizienten (= autonom; explizit lösbarer Spezialfall):

Gleichung n -ter Ordnung $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = b(t)$, $y(t), b(t) \in \mathbb{R}$

Ansatz (homogene Gleichung): $y(t) = e^{\lambda t} \rightarrow$ charakteristisches Polynom $p(\lambda) = 0$

Bei mehrfachen Nullstellen des charakteristischen Polynoms betrachte $t^k e^{\lambda t}$.

Spezielle Inhomogenitäten erlauben direkte Lösung (ohne Variation der Konstanten).

n -dimensionales System erster Ordnung $y' = Ay + b(t)$, A $n \times n$ Matrix, $y(t), b(t) \in \mathbb{R}^n$

Erster Zugang (homogene Gl.): Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}v$, dann λ Eigenwert, v Eigenvektor von A , also $Av = \lambda v$. Dies führt zu allgemeiner Lösung, falls eine Basis aus Eigenvektoren existiert (d.h. A diagonalisierbar).

Zweiter Zugang (homogene Gl.): Lösung ist $y(t) = e^{At}y_0$ (y_0 Anfangsbedingung).

Zur Berechnung von e^{At} verwende wiederum Eigenvektoren und Eigenwerte, falls A diagonalisierbar.

Weiteres (in Vorlesung nicht behandelt)

- ▷ Kennt man den Orbit eines Vektorfeldes, kann man die zugehörige Integalkurve durch eine Integration erhalten.
- ▷ Lineares System mit konstanten Koeffizienten, nicht diagonalisierbarer Fall: e^{tA} kann mittels der Jordan-Normalform bestimmt werden, dies führt auf Lösungen, die Linearkombinationen von $t^k e^{\lambda t}v$ sind, analog zu mehrfachen Nullstellen bei einer Gleichung n -ter Ordnung.